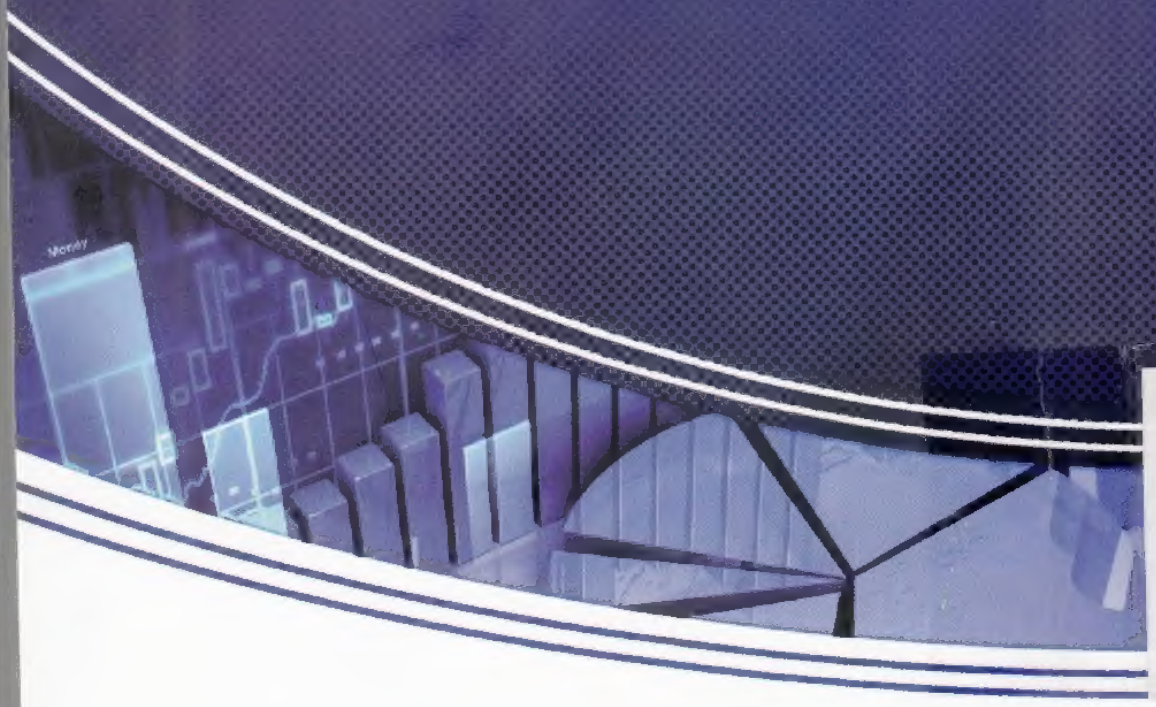
به همراه CD

مقدماتی

# اقتصاد سنجی (جلد ۱)

همراه با کاربرد Eviews8 & Stata12



دکتر علی سوری

# فهرست مطالب


| عنوان | صفحه |
|---|---|
| **جلد اول** | |
| **مقدمه** | ۱ |
| **فصل اول: مروری بر مفاهیم پایه‌ای آمار و نرم‌افزارهای Eviews و Stata** | ۵ |
| ۱-۱ مقدمه | ۵ |
| ۱-۲ نمونه تصادفی | ۵ |
| ۱-۳ توزیع مشترک متغیرهای نمونه یا توزیع مشترک نمونه تصادفی | ۶ |
| ۱-۴ تابعی از متغیرهای نمونه (آماره) | ۸ |
| ۱-۵ تخمین | ۹ |
| ۱-۵-۱ تخمین و تخمین‌زننده | ۹ |
| ۱-۵-۲ روش‌های تخمین | ۱۱ |
| روش گشتاورها | ۱۱ |
| روش حداکثر درستنمایی | ۱۲ |
| روش حداقل مربعات معمولی | ۱۴ |
| ۱-۵-۳ خواص تخمین‌زننده‌ها | ۱۴ |
| بدون تورش یا نااریب بودن | ۱۵ |
| کارایی (حداقل واریانس) | ۱۶ |
| سازگاری | ۱۸ |
| کفایت | ۱۹ |
| ۱-۵-۴ تخمین فاصله‌ای | ۲۱ |
| ۱-۶ آزمون فرضیه | ۲۳ |
| خطای نوع اول و نوع دوم | ۲۴ |
| ۱-۷ مروری بر توزیع‌های مهم | ۲۵ |
| ۱-۷-۱ توزیع نرمال استاندارد | ۲۵ |

۲-۷-۱ توزیع کای‌دو ۲۵
۳-۷-۱ توزیع t ۲۸
۴-۷-۱ توزیع F ۲۹
۵-۷-۱ حالت‌های خاص توزیع‌های $\chi^2$ ، t و F ۳۰
۸-۱ انواع داده‌ها ۳۱
۹-۱ آشنایی مقدماتی با نرم‌افزار Eviews ۳۲
مسائل ۳۹
ضمیمه فصل اول: مروری بر نرم افزار Stata ۴۲

**فصل دوم: رگرسیون ساده** ۵۳
۱-۲ مقدمه ۵۳
۲-۲ امید ریاضی شرطی و رگرسیون ۵۳
رگرسیون نرمال ۵۵
۳-۲ جملهٔ خطا و معادله رگرسیون ۵۷
۴-۲ فروض معادله رگرسیون ۵۸
۵-۲ تحلیل رگرسیون تجربی ۶۲
۶-۲ تخمین معادله رگرسیون ۶۳
۷-۲ خواص تخمین‌زننده‌های OLS ۶۶
۱-۷-۲ تخمین‌زنندهٔ خطی ۶۷
۲-۷-۲ بدون تورش بودن ۶۷
۳-۷-۲ سازگاری ۶۸
۴-۷-۲ حداقل واریانس ۶۸
۵-۷-۲ توزیع تخمین‌زننده‌های OLS ۶۹
۶-۷-۲ همبستگی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ ۶۹
۸-۲ تغییرات کل، تغییرات توضیح داده شده و تغییرات توضیح داده نشده ۷۱
۹-۲ ضریب تعیین $(R^2)$ ۷۲
۱۰-۲ میانگین خطای تخمین یا انحراف معیار رگرسیون( $\hat{\sigma}$ ) ۷۳
۱۱-۲ آزمون معنادار بودن ضرایب رگرسیون ۷۵
۱۲-۲ تحلیل واریانس (آزمون معنادار بودن رگرسیون) ۷۷
۱۳-۲ جمع‌بندی و تحلیل نتایج رگرسیون ۸۰
۱۴-۲ پیش‌بینی و فاصله اطمینان پیش‌بینی ۸۳
۱۵-۲ رگرسیون‌های غیرخطی ۸۷
۱-۱۵-۲ روابط معکوس ۸۷

۲-۱۵-۲ معادلات تمام لگاریتمی (log-log) ۸۸
۳-۱۵-۲ توابع نمایی ۹۰
۴-۱۵-۲ رگرسیون انحراف از میانگین ۹۱
۵-۱۵-۲ رگرسیون با متغیرهای استاندارد شده ۹۲
۷-۱۵-۲ برآورد معادله روند ۹۳
۸-۱۵-۲ برآورد معادله نرخ رشد ۹۴
۱۶-۲ تحلیل همبستگی ۹۶
۱-۱۶-۲ کوواریانس ۹۶
۲-۱۶-۲ ضریب همبستگی ۹۹
مسائل ۱۰۴
ضمیمه فصل دوم: برآورد رگرسیون ساده در Stata ۱۱۰

**فصل سوم: رگرسیون چندمتغیره** ۱۱۹
۱-۳ مقدمه ۱۱۹
۲-۳ رگرسیون دو متغیره: مفاهیم و فروض ۱۱۹
۳-۳ تخمین ضرایب رگرسیون دو متغیره و خواص آنها ۱۲۰
۴-۳ ضریب تعیین و خطای معادلهٔ رگرسیون ۱۲۳
۵-۳ معیارهای اطلاعات ۱۲۵
۶-۳ آزمون معنی‌دار بودن ضرایب معادله رگرسیون ۱۲۶
۷-۳ آزمون معنی‌دار بودن معادله رگرسیون (تحلیل واریانس) ۱۲۷
۸-۳ تحلیل نتایج رگرسیون دو متغیره ۱۲۸
۹-۳ تحلیل همبستگی چندمتغیره ۱۳۰
۱۰-۳ مدل Kمتغیره ۱۳۳
۱۱-۳ رگرسیون مقید و تخمین‌زننده‌های مقید ۱۴۰
۱۲-۳ آزمون محدودیت‌ها ۱۴۳
۱۳-۳ پیش‌بینی با رگرسیون چندمتغیره ۱۴۸
مسائل ۱۵۰
ضمیمه فصل سوم: برآورد رگرسیون چند متغیره در Stata ۱۵۵

**فصل چهارم: نقض فروض کلاسیک** ۱۵۹
۱-۴ مقدمه ۱۵۹
۲-۴ فرض اول: صفر بودن میانگین خطا ۱۵۹
۳-۴ فرض دوم: واریانس همسانی ۱۶۳

۱-۳-۴ ماهیت واریانس ناهمسانی ۱۶۳
۲-۳-۴ پیامدهای واریانس ناهمسانی ۱۶۵
۳-۳-۴ برآورد واریانس مستحکم وایت ۱۶۵
۴-۳-۴ آزمون‌های تشخیص واریانس ناهمسانی ۱۶۹
الف) آزمون بارتلت ۱۶۹
ب) آزمون گلدفلد- کوانت ۱۷۱
ج) آزمون گلجسر ۱۷۲
د) آزمون همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن ۱۷۲
هـ) آزمون بروش- پاگان-گادفری ۱۷۳
و) آزمون هاروی ۱۷۴
ز) آزمون وایت ۱۷۵
۵-۳-۴ تخمین ضرایب با وجود واریانس ناهمسانی ۱۷۹
۴-۴ فرض سوم: عدم خودهمبستگی ۱۸۵
۱-۴-۴ مفهوم وقفه ۱۸۵
۱-۴-۴ پیامدهای خودهمبستگی ۱۸۵
۲-۴-۴ روش‌های نموداری جهت تشخیص خودهمبستگی ۱۸۶
۳-۴-۴ آزمون دوربین- واتسون ۱۹۰
۴-۴-۴ آزمون بروش-گادفری ۱۹۴
۵-۴-۴ پیامد نادیده گرفتن خودهمبستگی ۱۹۶
۶-۴-۴ تخمین ضرایب در حالت خودهمبستگی ۱۹۷
۷-۴-۴ خودهمبستگی و مدل‌های پویا ۱۹۹
۸-۴-۴ خودهمبستگی و فرایندهای خودرگرسیون (AR) و میانگین متحرک ۲۰۲
۵-۴ فرض ۴: غیر تصادفی بودن متغیرهای توضیحی ۲۰۳
۶-۴ فرض ۵: فرض نرمال بودن $u_t$ ۲۰۴
مسائل ۲۰۸
ضمیمه فصل چهارم: آزمون نقض فروض در Stata ۲۱۲

**فصل پنجم: متغیرهای مجازی** ۲۱۷
۱-۵ مقدمه ۲۱۷
۲-۵ متغیر مجازی ۲۱۷
۳-۵ رگرسیون روی متغیر مجازی ۲۱۸
۴-۵ دام متغیرهای مجازی ۲۲۰
۴-۵ رگرسیون روی متغیر مجازی همراه با متغیر توضیحی ۲۲۱

۵-۵ متغیر مجازی و تغییر شیب ۲۲۱
۵-۶ وجود دو عامل کیفی ۲۲۳
۵-۷ تأثیر متقابل دو عامل کیفی ۲۲۴
۵-۸ متغیرهای مجازی و تغییر ساختار ۲۲۴
۵-۹ متغیرهای مجازی و مشاهدات دور افتاده ۲۲۵
۵-۱۰ متغیرهای مجازی و تغییرات فصلی ۲۲۸
۵-۱۱ توابع لگاریتمی و متغیر مجازی ۲۲۹
۵-۱۲ قیمت‌گذاری عوامل کیفی ۲۳۰
مسائل ۲۳۲
ضمیمه فصل پنجم: متغیرهای مجازی در Stata ۲۳۴

**فصل ششم: آزمون‌های خاص: تصریح مدل، تغییر ساختاری و علیت** ۲۳۷
۶-۱ مقدمه ۲۳۷
۶-۲ همخطی ۲۳۷
۶-۲-۱ مفهوم همخطی ۲۳۷
۶-۲-۲ مشکلات ناشی از همخطی ۲۳۸
۶-۲-۳ شناسایی همخطی ۲۳۹
۶-۲-۴ راه‌های کاهش همخطی ۲۴۲
۶-۳ فرم تابعی نادرست ۲۴۴
۶-۴ حذف متغیرهای مهم ۲۴۸
۶-۵ ورود متغیرهای نامربوط ۲۵۳
۶-۶ آزمون‌های ثبات ضرایب ۲۵۶
۶-۶-۱ آزمون نقطه شکست چاو ۲۵۶
۶-۶-۲ آزمون پیش‌بینی چاو ۲۵۸
۶-۶-۳ آزمون‌های بازگشتی ۲۶۰
۶-۶-۴ پیش‌بینی یک‌قدمی ۲۶۴
۶-۶-۵ آزمون مجموع تجمعی خطاهای بازگشتی (CUSUM) ۲۶۶
۶-۶-۶ آزمون مجموع مجذور تجمعی خطاهای بازگشتی (CUSUMQ) ۲۶۸
۶-۶-۷ متغیرهای مجازی ۲۶۹
۶-۷ خطای اندازه‌گیری متغیرها ۲۷۰
۶-۹ علّیت ۲۷۳
مسائل ۲۷۵
ضمیمه فصل ششم: آزمون‌های خاص در Stata ۲۷۸

## جلد دوم

**فصل هفتم: روش حداکثر درستنمایی** ۲۸۳
۷-۱ مقدمه ۲۸۳
۷-۲ تابع درستنمایی ۲۸۳
۷-۳ تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی ۲۸۵
۷-۴ روش حداکثر درستنمایی در رگرسیون ساده ۲۸۶
۷-۵ روش حداکثر درستنمایی در رگرسیون چند متغیره ۲۸۸
۷-۶ روش حداکثر درستنمایی در حالت واریانس ناهمسانی (روش GLS) ۲۹۰
۷-۶ شبه $R^2$ ۲۹۲
۷-۷ آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون ۲۹۳
۷-۸ تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی مقید ۲۹۴
۷-۹ شرط مرتبه دوم ۲۹۵
۷-۱۰ ماتریس امتیاز ۲۹۶
۷-۱۱ ماتریس اطلاعات ۲۹۹
۷-۱۲ رابطه ماتریس امتیاز و ماتریس اطلاعات ۳۰۰
۷-۱۳ نامساوی کرامر- رائو ۳۰۲
۷-۱۴ آزمون نسبت درستنمایی (LR) ۳۰۴
۷-۱۵ آزمون ضریب لاگرانژ ۳۰۶
۷-۱۶ آزمون والد ۳۰۸
۷-۱۷ مقایسه آماره‌های نسبت درستنمایی، والد و ضریب لاگرانژ ۳۱۰
مسائل ۳۱۳

**فصل هشتم: متغیرهای ابزاری(IV) و حداقل مربعات دومرحله‌ای(2SLS)** ۳۱۵
۸-۱ مقدمه ۳۱۵
۸-۲ متغیرهای ابزاری (IV) در رگرسیون ساده ۳۱۵
۸-۳ واریانس تخمین‌زنندهٔ IV ۳۱۹
۸-۴ ضریب تعیین ($R^2$) ۳۲۱
۸-۵ متغیرهای ابزاری در رگرسیون چند متغیره ۳۲۲
۸-۶ تخمین‌زنندهٔ IV در حالت عمومی ۳۲۴
۸-۷ تخمین‌زننده حداقل مربعات دومرحله‌ای (2SLS) ۳۲۷
۸-۸ آماره F در روش متغیرهای ابزاری ۳۲۸
۸-۹ آزمون سارگان برای بررسی اعتبار متغیرهای ابزاری ۳۲۹
۸-۱۰ آزمون هاسمن ۳۳۰

مسائل ۳۳۳
ضمیمه فصل هشتم: آزمون‌های خاص در Stata ۳۳۴

**فصل نهم: مدل‌های غیرخطی** ۳۳۷
۹-۱ مقدمه ۳۳۷
۹-۲ رگرسیون خطی ۳۳۷
۹-۳ رگرسیون‌های غیرخطی قابل تبدیل به خطی ۳۳۸
۹-۴ رگرسیون غیرخطی ۳۳۸
۹-۵ فروض مدل رگرسیون غیرخطی ۳۴۰
۹-۶ تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات غیرخطی ۳۴۱
۹-۶-۱ الگوریتم گاوس-نیوتن ۳۴۱
۹-۶-۲ الگوریتم نیوتن-رافسون ۳۵۱
۹-۶-۳ مقایسه الگوریتم‌های گاوس-نیوتن و نیوتن-رافسون ۳۵۱
۹-۷ روش حداکثر درستنمایی ۳۵۵
۹-۸ آزمون محدودیت‌ها در مدل‌های غیرخطی ۳۶۳
مسائل ۳۶۸
ضمیمه فصل نهم: رگرسیون غیر خطی در Stata ۳۶۹

**فصل ۱۰: مدل‌های با وقفهٔ توزیعی** ۳۷۱
۱۰-۱ مقدمه ۳۷۱
۱۰-۲ اثرات تأخیری ۳۷۱
۱۰-۳ تخمین مدل‌های با وقفهٔ توزیعی ۳۷۲
۱۰-۴ الگوی وقفهٔ خطی ۳۷۶
۱۰-۵ الگوی وقفهٔ V معکوس ۳۷۸
۱۰-۶ الگوی وقفهٔ چندجمله‌ای: روش آلمون ۳۸۰
۱۰-۷ مدل‌های با وقفهٔ نامحدود: تبدیل کویک ۳۸۸
۱۰-۸ الگوی وقفهٔ پاسکال ۳۹۲
۱۰-۹ مبانی نظری مدل‌های با وقفهٔ توزیعی ۳۹۴
۱۰-۱۰ مدل‌های خودرگرسیون با وقفهٔ توزیعی (ARDL) ۳۹۷
مسائل ۴۰۴
ضمیمه فصل دهم: برآورد مدل‌های با وقفهٔ توزیعی در Stata ۴۰۶

**فصل یازدهم: سری‌های زمانی یک متغیره** ٤٠٧
۱-۱۱ مقدمه ۴۰۷
۲-۱۱ برخی مفاهیم سری‌های زمانی ۴۰۸
۱-۲-۱۱ فرایند اکیداً مانا ۴۰۸
۲-۲-۱۱ فرایند مانای ضعیف ۴۰۸
۳-۲-۱۱ فرایند تصادفی محض ۴۰۹
۴-۲-۱۱ آزمون معنادار بودن ضرایب خودهمبستگی ۴۱۰
۳-۱۱ فرایند میانگین متحرک ۴۱۴
۴-۱۱ فرایند خودرگرسیون ۴۲۱
۵-۱۱ قضیه تجزیه ولد ۴۳۴
۶-۱۱ ضرایب خودهمبستگی جزئی ۴۳۵
۷-۱۱ معکوس‌پذیری MA(q) ۴۳۶
۸-۱۱ فرایند ARMA ۴۳۹
۹-۱۱ مدل سازی ARMA: روش باکس- جنکینز ۴۴۰
۱۰-۱۱ استفاده از معیارهای اطلاعات برای انتخاب مدل ARMA ۴۴۴
۱۱-۱۱ مدل‌های ARIMA ۴۴۵
۱۲-۱۱ پیش‌بینی با استفاده از مدل‌های سری زمانی ۴۴۶
۱-۱۲-۱۱ معیارهای ارزیابی پیش‌بینی ۴۴۶
۲-۱۲-۱۱ پیش‌بینی با مدل MA ۴۴۹
۳-۱۲-۱۱ پیش‌بینی با مدل AR ۴۵۰
۴-۱۲-۱۱ پیش‌بینی ایستا و پویا ۴۵۱
مسائل ۴۵۵
ضمیمه فصل یازدهم: مدل‌های ARIMA در Stata ۴۵۷

**فصل دوازدهم: مانایی، ریشه واحد و هم‌انباشتگی** ٤٦١
۱-۱۲ مقدمه ۴۶۱
۲-۱۲ مانایی ۴۶۱
۳-۱۲ مانایی ضعیف ۴۶۲
۴-۱۲ سری‌های زمانی مانا ۴۶۳
۵-۱۲ روند قطعی ۴۶۵
۶-۱۲ روند تصادفی ۴۶۶
۷-۱۲ ترکیب روند قطعی و روند تصادفی ۴۶۹
۸-۱۲ روندزدایی ۴۷۱

۹ ۱۲ آزمون ریشه واحد ۴۷۲
۱۰-۱۲ آزمون ریشه واحد و تغییر ساختاری ۴۸۰
۱۱-۱۲ هم‌انباشتگی ۴۸۵
۱۲-۱۲ آزمون هم‌انباشتگی ۴۸۹
۱۳-۱۲ مدل‌های تصحیح خطا (ECM) ۴۹۲
۱۴-۱۲ تخمین مدل تصحیح خطا ۴۹۴
مسائل ۴۹۵
ضمیمه فصل دوازدهم: آزمون‌های مانایی در Stata ۴۹۸

**فصل سیزدهم: سری‌های زمانی فصلی** ۵۰۱
۱-۱۳ مقدمه ۵۰۱
۲-۱۳ الگوی فصلی قطعی ۵۰۲
۱-۲-۱۳ متغیرهای مجازی فصلی ۵۰۲
۲-۲-۱۳ الگوهای مثلثاتی ۵۰۴
۳-۱۳ مدل‌های ARMA فصلی (SARMA) ۵۰۹
۴-۱۳ مدل ARIMA فصلی (SARIMA) ۵۱۳
۵-۱۳ ضرایب خودهمبستگی سری‌های زمانی فصلی ۵۱۶
۶-۱۳ ریشه واحد فصلی ۵۱۹
۷-۱۳ آزمون ریشه واحد فصلی ۵۲۳
مسائل ۵۳۰
ضمیمه فصل سیزدهم: ریشه واحد فصلی در Stata ۵۳۱

**فصل چهاردهم: مدل‌های تغییرپذیری** ۵۳۵
۱-۱۴ مقدمه ۵۳۵
۲-۱۴ واریانس ناهمسانی ۵۳۵
۳-۱۴ تغییرپذیری و نااطمینانی ۵۳۹
۴ ۱۴- مدل ARCH ۵۴۰
۵-۱۴ آزمون ARCH ۵۴۲
۶ ۱۴ محدودیت‌های مدل ARCH ۵۴۵
۷-۱۴- مدل ARCH تعمیم‌یافته (GARCH) ۵۴۵
۸-۱۴ تخمین مدل‌های ARCH و GARCH ۵۴۶
۹-۱۴ مدل GARCH نامتقارن ۵۵۲
۱-۹-۱۴ مدل GJR ۵۵۳

۱۴-۹-۲ مدل TARCH ۵۵۴
۱۴-۹-۳ مدل EGARCH ۵۵۶
۱۴-۹-۴ آزمون عدم‌تقارن ۵۵۸
۱۴-۹-۵ منحنی تأثیر خبر ۵۶۱
۱۴-۱۰ وارد نمودن GARCH در معادله میانگین شرطی (ARCH-M) ۵۶۲
۱۴-۱۱ GARCH با اجزاء موقتی و دائمی ۵۶۴
۱۴-۱۲ پیش‌بینی با مدل‌های GARCH ۵۶۵
۱۴-۱۳ مدل‌های GARCH چندمتغیره (MGARCH) ۵۶۹
مسائل ۵۷۷
ضمیمه فصل چهاردهم: مدل‌های GARCH در Stata ۵۸۰

**فصل پانزدهم: مدل‌های تغییر جهت** ۵۸۷
۱۵-۱ مقدمه ۵۸۷
۱۵-۲ تغییرات فصلی ۵۸۹
۱۵-۳ توابع خطی قطعه‌ای ۵۹۱
۱۵-۴ مدل‌های تغییر جهت مارکف ۵۹۳
۱۵-۴-۱ مبانی مدل‌های تغییر جهت مارکف ۵۹۴
۱۵-۴-۲ کاربردی از مدل تغییر جهت مارکف ۶۰۱
۱۵-۵ مدل‌های خودرگرسیون آستانه ۶۰۴
مسائل ۶۰۹

**فصل شانزدهم: معادلات به‌ظاهر نامرتبط (SUR)** ۶۱۱
۱۶-۱ مقدمه ۶۱۱
۱۶-۲ الگوی سادهٔ معادلات به‌ظاهر نامرتبط ۶۱۱
۱۶-۳ تخمین‌زننده‌های OLS در معادلات به‌ظاهر نامرتبط ۶۱۲
۱۶-۴ تخمین‌زننده‌های GLS در معادلات به‌ظاهر نامرتبط ۶۱۳
۱۶-۵ شرایط یکسان بودن OLS و GLS ۶۱۵
۱۶-۶ تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات تعمیم یافتهٔ عملی (FGLS) ۶۱۷
۱۶-۷ کارایی GLS در معادلات به‌ظاهر نامرتبط ۶۱۷
۱۶-۸ آزمون قطری بودن $\Sigma$ ۶۲۰
مسائل ۶۲۱
ضمیمه فصل شانزدهم: معادلات به‌ظاهر نامرتبط (SUR) در Stata ۶۲۳

**فصل هفدهم: معادلات همزمان** ۶۲۵
۱-۱۷ مقدمه ۶۲۵
۲-۱۷ سیستم معادلات همزمان: تعاریف و مفاهیم ۶۲۵
۳-۱۷ تخمین معادلات فرم ساختاری از روش OLS و تورش معادلات همزمان ۶۳۲
۴-۱۷ تخمین معادلات فرم خلاصه‌شده با OLS و مشکل برآورد ضرایب ساختاری ۶۳۴
۵-۱۷ شناسایی (تشخیص) معادلات فرم ساختاری ۶۳۵
۱-۵-۱۷ انواع معادلات ساختاری بر اساس قابلیت شناسایی ۶۳۵
۲-۵-۱۷ شرط درجه‌ای ۶۳۶
۳-۵-۱۷ شرط رتبه‌ای ۶۳۸
۴-۵-۱۷ تشخیص معادلات با استفاده‌از محدودیت روی ماتریس‌واریانس-کوواریانس ۶۴۰
۶-۱۷ تخمین سیستم معادلات همزمان ۶۴۲
۱-۶-۱۷ روش‌های تک معادله‌ای ۶۴۲
الف) تخمین سیستم معادلات بازگشتی با روش OLS ۶۴۳
ب) تخمین معادلات همزمان با روش حداقل مربعات غیرمستقیم (ILS) ۶۴۵
ج) برآورد معادلات بیش از حد مشخص با روش 2SLS ۶۴۶
د) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود (LIML) ۶۴۷
۲-۶-۱۷ روش‌های سیستمی ۶۴۸
الف) روش حداقل مربعات سه مرحله‌ای (3SLS) ۶۴۸
ب) برآورد سیستم معادلات همزمان با روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات ۶۴۹
**ضمیمه فصل هفدهم** ۶۵۴
۱- سیستم معادلات همزمان ۶۵۴
۲- شناسایی معادلات ۶۵۶
۳ شرایط رتبه‌ای و درجه‌ای برای تشخیص معادلات ۶۵۹
۴- روش‌های تخمین سیستم معادلات همزمان ۶۶۳
۱-۴ روش‌های تک معادله‌ای ۶۶۳
الف) روش OLS ۶۶۳
ب) روش متغیرهای ابزاری (IV) ۶۶۴
ج) روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای (2SLS) ۶۶۵
د) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود (LIML) ۶۶۸
۲-۴ روش‌های سیستمی ۶۷۲
الف) روش 3SLS ۶۷۲
ب) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML) ۶۷۷

مسائل ۶۸۱
ضمیمه فصل هفدهم: برآورد معادلات همزمان در Stata ۶۸۵

**فصل هجدهم: مدل‌های خودرگرسیون برداری (VAR) ۶۸۷**
۱-۱۸ مقدمه ۶۸۷
۲-۱۸ فرم ساختاری VAR ۶۸۷
۳-۱۸ فرم استاندارد (فرم حل‌شده) VAR ۶۸۸
۴-۱۸ VAR مقید و نامقید ۶۹۱
۵-۱۸ انتخاب طول وقفه در مدل‌های VAR ۶۹۱
۶-۱۸ شناسایی معادلات VAR ۶۹۲
۷-۱۸ تخمین حداکثر درستنمایی ۶۹۶
۸-۱۸ آزمون روابط علّی ۶۹۸
۹-۱۸ توابع واکنش ۷۰۰
۱۰-۱۸ تجزیه واریانس ۷۰۴
۱۱-۱۸ مانایی در مدل‌های VAR ۷۰۷
مسائل ۷۱۶
ضمیمه فصل هجدهم: مدل‌های VAR در Stata ۷۱۷

**فصل نوزدهم: مدل‌های تصحیح خطای برداری (VECM) ۷۲۵**
۱-۱۹ مقدمه ۷۲۵
۲-۱۹ نامانایی و هم‌انباشتگی در مدل‌های VAR ۷۲۵
VAR(۱) هم‌انباشته ۷۲۸
۳-۱۹هم‌انباشتگی و مدل تصحیح خطای برداری (VECM) ۷۳۰
۴-۱۹ روش جوهانسن ۷۳۱
۱-۴-۱۹ تخمین ضرایب با روش حداکثر درستنمایی ۷۳۱
۲-۴-۱۹ تعیین تعداد بردارهای هم‌انباشتگی ۷۴۵
آزمون اثر جوهانسون ۷۴۶
آزمون بزرگترین مقدار ویژه ($\lambda_{max}$) ۷۴۷
۳-۴-۱۹ نرمال‌سازی بردارهای هم‌انباشتگی ۷۴۷
۴-۴-۱۹ شناسایی روابط هم‌انباشتگی و آزمون محدودیت‌های خطی ۷۴۸
۵-۴-۱۹ عرض از مبدأ و روند در مدل VAR و VECM ۷۵۰
مسائل ۷۶۰
ضمیمه فصل نوزدهم: مدل‌های VECM در Stata ۷۶۱

**فصل بیستم: داده‌های ترکیبی** ۷۶۵
۲۰-۱ مقدمه ۷۶۵
۲۰-۲ داده‌های ترکیبی ۷۶۵
۲۰-۳ مدل‌های رگرسیونی داده‌های ترکیبی ۷۷۱
۲۰-۴ علائم و عملگرها ۷۷۳
۲۰-۵ مدل تجمیعی ۷۷۸
۲۰-۶ مدل اثرات ثابت ۷۸۱
۲۰-۷ آزمون معنادار بودن اثرات ثابت ۷۸۶
۲۰-۸ تخمین‌زننده‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی ۷۸۶
۲۰-۹ مدل اثرات تصادفی ۷۹۱
تخمین‌زنندهٔ GLS ۷۹۴
۲۰-۱۰ آزمون اثرات تصادفی ۸۰۰
۲۰-۱۱ آزمون هاسمن برای مدل اثرات تصادفی ۸۰۲
۱۲-۱۳ مدل اثرات دو طرفه ۸۰۵
۲۰-۱۲ آزمون ریشه واحد در داده‌های ترکیبی ۸۲۱
۲۰-۱۲-۱ آزمون ریشه واحد مشترک ۸۲۲
۲۰-۱۲-۱ آزمون‌های ریشه واحد مقطعی ۸۲۴
مسائل ۸۲۷
ضمیمه فصل بیستم: برآورد مدل داده‌های ترکیبی در Stata ۸۲۹

**فصل بیست و یکم: متغیرهای وابسته محدود (مدل‌های لاجیت و پروبیت)** ۸۳۵
۲۱-۱ مقدمه ۸۳۵
۲۱-۲ مدل‌های دو انتخابی ۸۳۶
۲۱-۳ مدل احتمال خطی (LPM) ۸۳۷
۲۱-۴ نظریه مطلوبیت تصادفی ۸۴۳
۲۱-۵ مدل پروبیت ۸۴۶
۱۹-۶ مدل لاجیت ۸۵۳
۲۱-۷ معیارهای خوبی برازش ۸۵۷
۲۱-۸ شاخص انحراف ۸۶۰
۲۱-۸ آزمون محدودیت‌ها در مدل‌های پروبیت و لاجیت ۸۶۶
مسائل ۸۶۷
ضمیمه فصل بیست و یکم: مدل‌های پروبیت و لاجیت در Stata ۸۶۸

**فصل بیست و دوم: متغیرهای وابسته محدود (مدل‌های منقطع، سانسورشده و شمارشی)** ۸۷۱
۲۲-۱ مقدمه ۸۷۱
۲۲-۲ توزیع‌های منقطع ۸۷۱
۲۲-۳ امید ریاضی و واریانس منقطع ۸۷۵
۲۲-۴ رگرسیون منقطع ۸۷۵
۲۲-۵ داده‌های سانسورشده ۸۸۲
۲۲-۶ توزیع نرمال سانسورشده ۸۸۲
۲۲-۷ رگرسیون سانسورشده: مدل توبیت ۸۸۴
۲۲-۷-۱ مدل توبیت ۸۸۵
۲۲-۷-۲ تفسیر نتایج مدل توبیت ۸۸۵
۲۲-۸ مدل‌های شمارشی: توزیع پوآسن ۸۹۱
۲۲-۸-۱ توزیع پوآسن ۸۹۱
۲۲-۸-۳ معیارهای خوبی برازش ۸۹۳
۲۲-۸-۴ آزمون فرضیه ۸۹۴
۲۲-۸-۵ تفسیر نتایج مدل پوآسن ۸۹۴
۲۲-۸-۶ محدودیت مدل پوآسن ۸۹۵
مسائل ۸۹۸
ضمیمه فصل بیست و دوم: کاربردهای Stata ۸۹۹

**فصل بیست و سوم: مقدمه‌ای بر اقتصاد سنجی بیزین** ۹۰۳
۲۳-۱ مقدمه ۹۰۳
۲۳-۲ توزیع پیشین و پسین ۹۰۴
۲۳-۳ تخمین‌زنندهٔ بیزین ۹۱۰
۲۳-۴ تابع زیان ۹۱۱
۲۳-۵ تخمین به‌عنوان مسئلهٔ تصمیم‌گیری ۹۱۳
۲۳-۶ تخمین بیزین و کلاسیک ۹۱۵
۲۳-۷ آزمون فرضیه در روش بیزین ۹۱۹
۲۳-۸ تخمین ضرایب رگرسیون با روش بیزین ۹۲۲
۲۳-۸-۱ تابع درستنمایی ۹۲۳
۲۳-۸-۲ توزیع پسین ضرایب رگرسیون و تخمین بیزین ۹۲۷
۲۳-۸-۳ توزیع‌های پیشین با اطلاعات غیرمفید ۹۲۸
۲۳-۸-۴ توزیع‌های پیشین با اطلاعات مفید ۹۳۲

۵-۸-۲۳ تخمین نقطه‌ای و تابع زیان ۹۴۲
۶-۸-۲۳ آزمون فرضیه ۹۴۳
مسائل ۹۴۵

**ضمائم** ۹۴۹
ضمیمه الف: معادلات تفاضلی ۹۵۱
ضمیمه ب: مقادیر ویژه ۹۶۳
ضمیمه ج: بردارها و ماتریس‌ها ۹۶۹
ضمیمه د: جداول آماری ۹۸۵
**منابع** ۹۹۵
**واژه‌نامه انگلیسی- فارسی** ۹۹۹
**واژه‌نامه فارسی- انگلیسی** ۱۰۰۷
**نمایه موضوعی** ۱۰۱۵

# فهرست کاربردهای Eviews


| عنوان | صفحه |
| --- | --- |
| آشنایی مقدماتی با نرم‌افزار Eviews | ۳۲ |
| ایجاد فایل کاری در Eviews | ۳۲ |
| ورود داده‌ها در Eviews | ۳۵ |
| وقفه‌ها و تفاضل‌ها در Eviews | ۳۶ |
| تغییر نام متغیرها در Eviews | ۳۷ |
| متغیر زمان در Eviews | ۳۷ |
| اصلاح داده‌های وارد شده در Eviews | ۳۷ |
| مشاهده‌داده‌های وارد شده در Eviews | ۳۷ |
| نمودارها در Eviews | ۳۸ |
| تغییر دوره زمانی در Eviews | ۳۹ |
| برآورد رگرسیون ساده در Eviews | ۸۰ |
| پیش‌بینی در Eviews | ۸۵ |
| برآورد روابط معکوس در Eviews | ۸۸ |
| برآورد معادله لگاریتمی در Eviews | ۸۹ |

برآورد تابع نمایی در Eviews ۹۰
برآورد رگرسیون انحراف از میانگین در Eviews ۹۲
برآورد رگرسیون متغیرهای استاندارد شده در Eviews ۹۳
برآورد معادله روند در Eviews ۹۵
برآورد معادله رشد در Eview ۹۶
برآورد معادلات غیرخطی درEviews ۹۶
محاسبه کوواریانس در Eviews ۹۹
محاسبه ضریب همبستگی در Eviews ۱۰۲
برآورد رگرسیون چندمتغیره در Eviews ۱۳۵
آزمون محدودیت‌ها (آزمون والد) در Eviews ۱۴۶
برآورد واریانس وایت در Eviews ۱۶۷
آزمون‌های واریانس ناهمسانی در Eviews ۱۷۳
آزمون وایت در Eviews ۱۷۷
روش GLS در Eviews ۱۸۳
آزمون دوربین - واتسون در Eviews ۱۹۴
آزمون بروش - گادفری در Eviews ۱۹۵
خودهمبستگی و مدل‌های پویا در Eviews ۲۰۰
رفع خودهمبستگی در استفاده از AR و MA در Eviews ۲۰۲
آزمون نرمال بودن در استفاده از Eviews ۲۰۶
متغیرهای مجازی در Eviews ۲۳۱
آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون با استفاده از نسبت درستنمایی در Eviews ۲۴۷
محاسبه ضرایب همبستگی ساده در Eviews ۲۷۲
آزمون RESET رمزی در Eviews ۲۷۸
آزمون متغیرهای حذف شده در استفاده از Eviews ۲۸۴
آزمون متغیرهای نامربوط در استفاده از Eviews ۲۸۶
آزمون نقطه شکست چاو در Eviews ۲۸۹
آزمون پیش‌بینی چاو در Eviews ۲۹۲

برآوردهای بازگشتی در Eviews ۲۹۳
آزمون پیش‌بینی یک‌قدمی در Eviews ۲۹۷
آزمون مجموع تجمعی خطاها (CUSUM) در Eviews ۲۹۹
آزمون مجموع مجذور تجمعی خطاهای بازگشتی (CUSUMQ) در Eviews ۳۰۰
آزمون ثبات ضرایب با استفاده از متغیرهای مجازی در Eviews ۳۰۲
آزمون علّیت گرانجر در Eviwes ۳۰۶
متغیرهای ابزاری در Eviews ۳۳۱
برآورد مدل‌های غیرخطی در Eviews ۳۶۱
آزمون محدودیت‌ها در Eviews ۳۶۴
تخمین مدل با وقفه توزیعی در Eviews ۳۷۶
برآورد مدل وقفه خطی در Eviews ۳۷۸
برآورد مدل V معکوس در Eviews ۳۸۰
روش آلمون در Eviews ۳۸۳
تبدیل کویک در Eviews ۳۹۲
الگوی وقفهٔ پاسکال در Eviews ۳۹۴
برآورد مدل ECM در Eviews ۴۰۴
ایجاد فرایند تصادفی محض در Eviews ۴۱۰
برآورد ضرایب خودهمبستگی در Eviwes ۴۱۲
ایجاد فرایند MA در Eviews ۴۲۰
ایجاد فرایند AR در Eviews ۴۳۰
برآورد مدل‌های ARMA در Eviews ۴۴۱
بازبینی مدل با استفاده از Eviews ۴۴۳
معیارهای اطلاعات در Eviwes ۴۴۵
پیش‌بینی سری‌های زمانی در Eviews ۴۵۳
آزمون ریشه واحد در Eviews ۴۷۴
آزمون فیلیپس- پرون در Eviews ۴۷۹
آزمون ریشه واحد در حالت شکست ساختاری در Eviews ۴۸۳

آزمون هم‌انباشتگی در Eviews ۴۹۰
آزمون ریشه واحد فصلی در Eviews ۵۲۸
آزمون ARCH در Eviews ۵۴۳
تخمین مدل GARCH در Eviews ۵۴۹
برآورد مدل GJR در Eviews ۵۵۳
برآورد مدل TARCH در Eviews ۵۵۵
برآورد مدل EGARCH در Eviews ۵۵۷
برآورد GARCH-M در Eviews ۵۶۳
برآورد GARCH با اجزاء موقتی و دائمی در Eviews ۵۶۴
پیش‌بینی واریانس شرطی در Eviews ۵۶۷
تخمین GARCH چند متغیره در Eviews ۵۷۳
آزمون تغییر جهت در Eviews ۵۹۲
برآورد مدل SUR در Eviews ۶۲۰
تخمین معادلات همزمان در Eviews ۶۴۹
برآورد مدل VAR در Eviews ۷۱۲
برآورد مدل VECM در Eviews ۷۵۳
تخمین مدل داده‌های ترکیبی در Eviews ۸۰۸
آزمون ریشه واحد داده‌های ترکیبی در Eviews ۸۲۴
برآورد مدل LPM در Eviews ۸۴۲
تخمین مدل پروبیت و لاجیت در Eviews ۸۶۴
برآورد رگرسیون منقطع در Eviews ۸۷۸
برآورد رگرسیون سانسور شده (مدل توبیت) در Eviews ۸۹۰
برآورد مدل پوآسن در Eviews ۸۹۶

# فهرست کاربردهای Stata


| عنوان | صفحه |
|---|---|
| آشنایی مقدماتی با نرم‌افزار Stata | ۴۲ |
| ایجاد فایل کاری و ورود داده‌ها در Stata | ۴۲ |
| مشاهده و اصلاح داده های وارد شده در Stata | ۴۳ |
| توصیف کلی متغیرها در Stata | ۴۳ |
| معرفی منوی Statistics در Stata | ۴۵ |
| ایجاد متغیر جدید در Ststs | ۴۶ |
| متغیر زمان در Stata | ۴۷ |
| نمودارها در Stata | ۴۷ |
| سایر فرمان‌ها در Stata | ۴۹ |
| افزودن دامنه در Stata | ۴۹ |
| سایر علائم در Stata | ۴۹ |
| لحاظ نکردن برخی از مشاهدات در Ststa | ۵۰ |
| حذف یک متغیر در Stata | ۵۰ |
| نشان‌گذاری متغیرها در Stata | ۵۰ |

برآورد رگرسیون ساده در Stata ۱۱۰
محاسبهٔ مقادیر تخمینی و باقیمانده‌ها در Stata ۱۱۲
پیش‌بینی در Stata ۱۱۲
محاسبهٔ ماتریس واریانس- کوواریانس ضرایب در Stata ۱۱۴
برآورد معادلات غیرخطی در Stata ۱۱۵
محاسبهٔ ضرایب همبستگی درStata ۱۱۶
برآورد معادلات رگرسیون چند متغیره در Stata ۱۵۵
آزمون محدودیت‌ها (آزمون والد) در Stata ۱۵۶
تخمین رگرسیون مقید در Stata ۱۵۷
آزمون‌های واریانس ناهمسانی در Stata ۲۱۲
برآورد واریانس مستحکم وایت در Stata ۲۱۴
روش GLS در Stata ۲۱۴
آزمون خودهمبستگی در Ststs ۲۱۵
آزمون دوربین - واتسون در Stata ۲۱۵
آزمون نرمال بودن در Stata ۲۱۵
متغیرهای مجازی در Stata ۲۳۴
آزمون حذف متغیرهای مهم در Stata ۳۱۰
آزمون متغیرهای زائد در Stata ۳۱۱
آزمون چاو در Stata ۳۱۱
آزمون علیت گرانجر در Stata ۳۱۲
متغیرهای ابزاری در Stata ۳۳۴
آزمون هاسمن در Stata ۳۳۵
برآورد معادلات غیرخطی در Stata ۳۶۹
تخمین مدل‌های با وقفه توزیعی در Stata ۴۰۶
محاسبهٔ ضرایب خودهمبستگی در Stata ۴۵۶
برآورد مدل‌های ARIMA در Stata ۴۵۸
پیش‌بینی مدل‌های ARIMA در Stata ۴۶۰

آزمون ریشه واحد ر Stata ۴۶۸
آزمون هم‌انباشتگی در Stata ۵۰۰
آزمون ریشه واحد فصلی در Stata ۵۳۱
آزمون ARCH در Stata ۵۸۰
تخمین مدل‌های GARCH در Stata ۵۸۱
برآورد مدل GARCH(p,q) در Stata ۵۸۲
برآورد مدل TARCH در Stata ۵۸۴
برآورد مدل EGARCH در Stata ۵۸۵
برآورد GARCH-M در Stata ۵۸۵
برآورد مدل SUR در Stata ۶۲۳
تخمین معادلات همزمان در Stata ۶۸۵
برآورد مدل VAR در Stata ۷۱۷
برآورد مدل VECM در Stata ۷۶۱
تخمین مدل داده‌های ترکیبی در Stata ۸۲۹
آزمون ریشه واحد داده‌های ترکیبی در Stata ۸۳۴
تخمین مدل پروبیت و لاجیت در Stata ۸۶۸
برآورد رگرسیون منقطع در Stata ۸۹۹
برآورد رگرسیون سانسور شده (مدل توبیت) در Stata ۹۰۰
برآورد مدل پوآسن در Stata ۹۰۱

## مقدمه

کتاب حاضر در راستای تدوین مجموعه‌ای نسبتاً جامع از مباحث اقتصاد سنجی برای دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته‌های اقتصاد و مالی می‌باشد. نسخه‌های قبلی این کتاب صرفاً شامل بخشی از مباحث اقتصاد سنجی بود که به‌صورت مقدماتی و آزمایشی به چاپ رسید. اکنون مجموعه کامل‌تری از این مباحث تهیه شده است که می‌تواند نیازهای مخاطبان بیشتری را تأمین نماید. مباحث کتاب به دو بخش مقدماتی و پیشرفته تقسیم شده است که به‌ترتیب شامل جلد ۱ و ۲ می‌باشد. در تدوین این مجموعه سعی شده که اولاً مبانی نظری به‌طور کامل ارائه گردد، ثانیاً ویژگی کاربردی مباحث حفظ شود و ثالثاً همراه با کاربرد نرم‌افزارها باشد که در این خصوص از دو نرم افزار رایج، Eviews و Stata استفاده شده است.

مباحث اقتصاد سنجی دامنه وسیعی از مطالب را از سطوح مقدماتی تا پیشرفته و از مباحث کاربردی تا نظری شامل می‌شود. با توجه به گستردگی مباحث، تنظیم کتابی که بتواند نیاز مخاطبین آن را تأمین نماید، بسیار دشوار است. با توجه به این نکات، در این کتاب سعی بر آن است که با رعایت حد میانه‌ای از تئوری و کاربرد، نیاز مخاطبین تأمین گردد. در این کتاب، تا حدود زیادی سعی شده تا مباحث اولیه با فشردگی بیشتری بیان شود تا امکان ارائه مباحث جدیدتر فراهم گردد. از طرف دیگر، چون برآورد معادلات و تحلیل مباحث، بدون استفاده از نرم‌افزار امکان‌پذیر نیست، لذا در پایان هر مبحث، کاربرد آن با استفاده از نرم‌افزار Eviews و سپس در پایان هر فصل، کاربردهای نرم‌افزار Stata نیز ارائه شده است. علاوه بر این، داده‌های مورد استفاده

همراه با نرم‌افزار Eveiws و Stata نیز در قالب یک CD ارائه شده است تا امکان استفادهٔ همزمان از کتاب و نرم‌افزار فراهم گردد. همچنین در هر جایی که کاربردهای Eviews و Stata آمده است، نام فایل مورد استفاده نیز درج شده تا امکان انجام مستقیم آنها فراهم شود.

در تنظیم این کتاب از منابع مختلفی استفاده شده است که البته در مواردی، کتاب اقتصاد سنجی مالی بروکس (۲۰۰۱ و ۲۰۰۸) و اقتصاد سنجی گرین (۲۰۱۲) بیش از بقیه، مورد استفاده قرار گرفته است.

این کتاب در دو جلد و ۲۳ فصل تنظیم شده است. فصل اول به کلیاتی راجع‌به توزیع‌های آماری و آشنایی مقدماتی با نرم‌افزارEviews و Stata اختصاص دارد. در این فصل مفاهیم و توزیع‌های مهم آماری که همواره در اقتصادسنجی مورد استفاده قرار می‌گیرد، ارائه شده است. همچنین بخشی نیز به نکات اولیه و مقدماتی برای آشنایی با نرم‌افزار Eviews و Stata اختصاص یافته است. فصل دوم اختصاص به مباحث پایه‌ای رگرسیون ساده دارد که در همه کتاب‌های اقتصادسنجی به چشم می‌خورد. در اینجا سعی شده تا مباحث رگرسیون را از توزیع‌های دو متغیره شروع کنیم. این شیوه کمک می‌کند تا مفهوم رگرسیون به‌عنوان امید ریاضی شرطی به‌خوبی توصیف شود. در فصل سوم نیز مباحث مذکور برای حالت‌های چند متغیره ارائه شده است. فصل چهارم اختصاص به نقض فروض کلاسیک و آزمون‌های مربوطه دارد.

در فصل پنجم، متغیرهای مجازی و نحوه استفاده از آنها در مباحث مختلف، ارائه شده است.

در فصل ششم سایر موضوعاتی که در کارهای تجربی به‌کار می‌روند، ارائه شده است. این موضوعات عمدتاً شامل تصریح مدل و آزمون‌های مربوطه می‌باشد.

فصل هفتم اختصاص به روش حداکثر درستنمایی و موضوعات و آزمون‌های پیرامون آن دارد. به‌ویژه سه آزمون معروف نسبت درستنمایی، والد و ضریب لاگرانژ به‌تفصیل بحث شده‌اند.

فصل هشتم اختصاص به متغیرهای ابزاری دارد که شامل مباحثی در خصوص روش IV و روش 2SLS می‌باشد.

فصل نهم به رگرسیون غیر خطی و روش‌های تخمین و الگوریتم‌های مربوطه دارد که به‌تفصیل بحث شده‌اند.

در فصل دهم الگوهای پویای تأخیری بحث شده است. در این فصل، روش‌های مختلف تخمین الگوهای پویا که با وقفه‌های توزیعی همراه هستند ارائه شده است. در پایان این فصل الگوهای ARDL نیز مورد بحث قرار گرفته است.

فصل‌های یازدهم و دوازدهم و سیزدهم به سری‌های زمانی یک متغیره اختصاص دارد. در فصل یازدهم مدل‌های ARIMA و در فصل دوازدهم مسائل مربوط به ناماناییی، ریشه واحد و هم‌انباشتگی بحث شده است. فصل سیزدهم نیز اختصاص به سری‌های زمانی فصلی دارد که خصوصیات آنها با سری‌های زمانی معمولی متفاوت است.

در فصل چهاردهم مدل‌های تغییرپذیری ارائه شده است. این مدل‌ها شامل انواع مدل‌های ARCH و GARCH می‌باشند. در فصل پانزدهم نیز نوع خاصی از تغییرات سری‌های زمانی بررسی شده است که موسوم به مدل‌های تغییر جهت هستند.

فصل‌های شانزده تا نوزده اختصاص به سیستم معادلات دارد. در فصل شانزدهم معادلات به‌ظاهر نامرتبط و در فصل هفدهم سیستم معادلات همزمان و انواع روش‌های تخمین آنها ارائه شده است. در فصل هجدهم و نوزدهم نیز سری‌های زمانی چند متغیر تحت عنوان مدل‌های خود رگرسیون برداری (VAR) مدل‌های تصحیح خطای برداری (VECM) ارائه شده‌اند.

داده‌های ترکیبی یا مدل‌های پانل در فصل بیستم ارائه شده است. در این فصل مدل‌های تجمیعی، اثرات ثابت و اثرات تصادفی و آزمون‌ها و روش‌های مربوطه به‌تفصیل بحث شده است.

فصل‌های بیست و یکم و بیست و دوم در مورد متغیرهای محدود بحث می‌کند. در این دو فصل مباحثی در خصوص متغیرهای وابستهٔ محدود از قبیل مدل‌های لاجیت و پروبیت، مدل پوآسن، مدل‌های سانسور شده و منقطع بحث شده است.

فصل بیست و سوم مباحث مقدماتی در مورد اقتصاد سنجی بیزین ارائه می‌کند. در این فصل ابتدا مباحث اولیه مانند توزیع‌های پسین و پیشین، تخمین‌زنندهٔ کلاسیک و بیزین و روش تخمین بیزین در معادلات رگرسیون ارائه شده است.

به‌هرحال گستردگی مباحث اقتصاد سنجی، امکان ارائه همهٔ مطالب را میسر نمی‌سازد. بدیهی است که هر چند سعی شده تا مطالب بیشتری ارائه شود ولی هنوز کاستی‌های زیادی وجود دارد. حجم مطالب و تنوع آن به‌گونه‌ای است که امکان وجود اشتباهات را زیاد می‌کند و بدیهی است که کاستی‌ها و نواقص این کتاب زیاد خواهد بود که بابت آن از اساتید محترم و دانشجویان گرامی عذر تقصیر می‌خواهم. بی‌تردید ارائه نظرات شما می‌تواند در بهبود و ارتقای مطالب کتاب، راهگشا باشد. منتظر دریافت نظرات ارزشمند و اصلاحی شما از طریق ایمیل souri.econometrics@yahoo.com هستم. در پایان لازم می‌دانم از همه همکاران و دانشجویانی که نظرات اصلاحی خود را به اینجانب منعکس نموده‌اند تشکر کنم. همچنین لازم است که از صبر و مساعدت همسرم قدردانی کنم که با تقبل همهٔ مسئولیت‌های زندگی، مرا در نگارش این مجموعه یاری نمودند و همچنین ویرایش و بازخوانی مطالب و صفحه‌آرایی آن را به‌عهده گرفتند، لذا این اثر را به ایشان تقدیم می‌کنم.

**علی سوری**

بهمن ۱۳۹۲

فصل اول

# مروری بر مفاهیم پایه‌ای آمار و نرم‌افزارهای Eviews و Stata

## ۱-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مروری به برخی از مفاهیم پایه‌ای و توابع آماری که استفاده گسترده‌ای در اقتصادسنجی دارند، خواهیم داشت. سپس به معرفی اجمالی نرم‌افزارهای Eviews و Stata و اصول مقدماتی آنها می‌پردازیم. سایر کاربردهای این نرم‌افزار، در فصول بعدی و همراه با مباحث مربوطه، ارائه خواهند شد.

## ۱-۲ نمونه تصادفی

نمونه تصادفی قسمتی از «جامعه آماری» است که به‌طور تصادفی انتخاب می‌شود. در اینجا لازم است دو مفهوم را از هم متمایز کنیم که یکی «نمونه مشاهده شده» و دیگری «نمونه تصادفی» است. «نمونه مشاهده شده» فقط شامل اعداد و ارقامی است که بعد از نمونه‌گیری به‌دست می‌آیند. اما «نمونه تصادفی» به مرحلهٔ قبل از نمونه‌گیری مربوط می‌شود و نمی‌دانیم که چه مقادیری را مشاهده خواهیم کرد.

**مثال ۱-۱:** فرض کنید که جامعه آماری شامل ۳ دانشجو است که نمرات آنها در درس آمار شامل ۱۰، ۱۲ و ۱۵ می‌باشد. لذا $N=3$ بوده و می‌خواهیم نمونه‌ای به حجم $n=2$ با

روش جایگزینی انتخاب کنیم، بدیهی است که یکبار نمونه‌گیری را انجام خواهیم داد و بعد از انجام نمونه‌گیری فقط دو عدد (نمره) به‌دست خواهد آمد. اما قبل از انجام نمونه‌گیری نمی‌دانیم که کدام دو عدد (نمره) را به‌دست خواهیم آورد. لذا نمونهٔ تصادفی شامل متغیرهای تصادفی $(X_1, X_2)$ و نمونهٔ مشاهده شده شامل اعداد یا مقادیر $(x_1, x_2)$ خواهد بود. توجه شود که $X_1$ بیانگر انتخاب اول و $X_2$ بیانگر انتخاب دوم می‌باشد. تمامی نتایج ممکن برای $(X_1, X_2)$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{array}{ccc} (۱۰,۱۰) & (۱۲,۱۰) & (۱۵,۱۰) \\ (۱۰,۱۲) & (۱۲,۱۲) & (۱۵,۱۲) \\ (۱۰,۱۵) & (۱۵,۱۲) & (۱۵,۱۵) \end{array}$$

بنابراین ۹ $(=۳^۲)$ نتیجهٔ ممکن خواهیم داشت. بدیهی است که فقط یک‌بار نمونه‌گیری انجام می‌شود و لذا «نمونهٔ مشاهده شده» فقط شامل یکی از نمونه‌های فوق خواهد بود.

بنابراین، نمونه تصادفی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

«نمونه تصادفی مجموعه‌ای از $n$ متغیر تصادفی $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ است که مستقل از هم بوده و توزیع آنها با توزیع $X$ در جامعه آماری یکسان است.»

### ۳-۱ توزیع مشترک متغیرهای نمونه یا توزیع مشترک نمونه تصادفی

یکی از نکات مهم در رابطه با نمونه تصادفی این است که هر متغیر نمونه (یعنی $X_i$) دقیقاً همان ویژگی‌های متغیر تصادفی $X$ در جامعه اصلی را دارد. به‌عنوان مثال فرض کنید جامعه آماری شامل ۱۰ نفر $(N=۱۰)$ باشد که متغیر تصادفی $X$ بیانگر بی‌سوادی اعضای این جامعه است:

$X = ۱$ بی‌سواد

$X = ۰$ باسواد

بنابراین اگر نسبت بی‌سوادی برابر با $p$ باشد، در این صورت اگر یک نفر را از این جامعه انتخاب کنیم، احتمال اینکه بی‌سواد باشد (یا احتمال اینکه $x=۱$ باشد) برابر با $p$ است و در غیر این صورت برابر با $q$ یا $۱-p$ است.

| $x$ | ۰ | ۱ |
|---|---|---|
| $P(x)$ | $q$ | $p$ |

و یا می‌توان آن را به‌صورت تابع احتمال دونقطه‌ای نشان داد:

$$P(x)=p^{x}q^{1-x} \quad ; \quad x=0,1$$

حال اگر از این جامعه، نمونه‌ای به حجم $n=2$ انتخاب کنیم، در این صورت نمونه تصادفی شامل $(X_1,X_2)$ است. حال سؤال این است که توزیع $X_1$ چگونه می‌باشد؟

اولاً مقادیر $X_1$ در نمونه، دقیقاً همان مقادیری است که $X$ در جامعه اصلی اختیار می‌کند. زیرا مقدار مشاهدهٔ اول یعنی $X_1$ یا ۰ است و یا ۱. اما احتمال اینکه $X_1=0$ باشد برابر است با احتمال اینکه $X=0$ باشد که هر دو بستگی به این دارند که چه نسبتی از جامعه بی‌سواد نمی‌باشد (یعنی $q$). بنابراین، توزیع $X_1$ دقیقاً همان توزیع $X$ است. به‌عبارت دقیق‌تر متغیر تصادفی $X_1$ با متغیر تصادفی $X$ هیچ‌گونه تفاوتی ندارد.

$$P(x_1)=p^{x_1}q^{1-x_1} \quad ; \quad x_1=0,1 \qquad \text{یا} \qquad \begin{array}{c|cc} x_1 & 0 & 1 \\ \hline P(x_1) & q & p \end{array}$$

همین استدلال را برای $X_2$ نیز می‌توان به‌کار برد.

بنابراین اگر در حالت کل، نمونه تصادفی به حجم $n$ باشد، در این صورت هر یک از متغیرهای تصادفی $X_1$، $X_2$، ... و $X_n$ دقیقاً همان توزیع $X$ در جامعه اصلی را خواهند داشت. در مثال فوق، هر یک از $X_i$ها توزیع دونقطه‌ای خواهند داشت:

$$P(x_i)=p^{x_i}q^{1-x_i} \quad x_i=0,1 \quad , \quad i=1,2,\cdots,n$$

**مثال ۲-۱:** فرض کنید که در جامعه آماری متغیر تصادفی $X$ بیانگر قد دانشجویان یک دانشگاه است که دارای توزیع نرمال با میانگین ۱۶۹ و واریانس ۶۴ می‌باشد:

$$X\sim(\mu=169,\sigma^2=64)$$

اگر از این جامعه نمونه‌ای تصادفی به حجم $n$ انتخاب کنیم هر یک از متغیرهای تصادفی $X_1$، $X_2$، ... و $X_n$ دارای توزیع نرمال خواهند بود:

$$E(X_i)=E(X)=\mu \quad , \quad \mathrm{var}(X_i)=\mathrm{var}(X)=\sigma^2$$

$$X_i\sim(\mu=169,\sigma^2=64)$$

در حالت کلی، برداری از متغیرهای تصادفی یعنی $X_1$، $X_2$،... و $X_n$ را داریم که مقادیر آنها با $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ نشان داده می‌شود. حال توزیع مشترک یا احتمال مشترک این نمونه تصادفی برابر است با:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) \qquad (۱-۱)$$

که بیانگر این است که چقدر احتمال دارد در نمونه‌گیری تصادفی، مقادیر $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ مشاهده گردد. اما از آنجا که این متغیرها، مستقل از هم می‌باشند لذا احتمال مذکور برابر است با:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\cdots P(X_n = x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i) \end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

در حالت پیوسته به‌جای تابع احتمال، از تابع چگالی استفاده می‌شود که در آن صورت تابع چگالی مشترک به‌دست می‌آید.

**مثال ۳-۱:** در مثال ۱-۱ اگر حجم نمونه $n$ باشد، در این صورت توزیع مشترک متغیرهای نمونه عبارت است از:

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = P(x_1)\cdots P(x_n) = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} x}$$

**مثال ٤-۱:** در مثال ۲-۱ توزیع مشترک متغیرهای نمونه عبارت است از:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) &= f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_n}(x_n) \\ &= f_X(x_1)\cdots f_X(x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} e^{-\frac{\sum_i (x_i - 168)^2}{128}} \end{aligned}$$

### ٤-۱ تابعی از متغیرهای نمونه (آماره)

از آنجا که $X_1$، $X_2$، ... و $X_n$ متغیرهای تصادفی هستند، لذا هر تابعی از این متغیرها نیز یک متغیر تصادفی است. همان‌طور که خواهیم دید، این توابع نقش مهمی در مباحثی چون تخمین و آزمون فرضیه دارند. شکل کلی چنین توابعی عبارت است از:

$$f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

توجه شود که این تابع، فقط تابعی از متغیرهای نمونه است شامل هیچیک از پارامترهای توزیع $X$ نیست. برخی از انواع مهم این توابع عبارتند از:

$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$$

$$\tilde{S}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n}$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$$

دو تابع نمونه‌ای یا آمارهٔ $\overline{X}$ و $S^2$ بیش از بقیه، مورد استفاده می‌باشد که اولی میانگین نمونه و دیگری واریانس نمونه است.

بر اساس هریک از توابع فوق می‌توان توابع دیگری را نیز تعریف کرد که در ادامه به آنها خواهیم پرداخت. از آنجا که هر یک از این توابع، متغیرهای تصادفی هستند لذا برای آنها می‌توان تابع احتمال یا چگالی را نیز به‌دست آورد.

### ۵-۱ تخمین

موضوع تخمین راجع به برآورد پارامترهای جامعهٔ اصلی است. در اینجا فرض می‌کنیم که توزیع $X$ در جامعه اصلی معلوم است ولی پارامترهای آن نامعلوم هستند. به‌عنوان مثال فرض کنید که توزیع $X$ در جامعه اصلی، نرمال است اما پارامترهای آن یعنی $\mu$ و $\sigma^2$ مجهول می‌باشند.

#### ۵-۱-۱ تخمین و تخمین‌زننده

فرض کنید نسبت بی‌سوادی در جامعه‌ای دارای توزیع دونقطه‌ای است که به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$P(x)=p^x q^{1-x} \quad ; \quad x=0,1$$

این توزیع یک پارامتر دارد که $p$ (یعنی نسبت بی‌سوادی) است. بنابراین توزیع $X$ معلوم است اما پارامتر این توزیع یعنی $p$، نامعلوم می‌باشد. حال با استفاده از اطلاعات نمونه می‌خواهیم $p$ را برآورد نماییم. فرض کنید نمونه‌ای به حجم $n$ انتخاب می‌کنیم. بعد از انجام نمونه‌گیری، مشاهدات ما شامل مقادیر $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ است که بر اساس آن، تخمین $p$ عبارت است از:

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

هر کدام از $x_i$ها فقط ۰ یا ۱ هستند. اگر همگی صفر باشند در این صورت تخمین $p$ برابر با ۰ و اگر همگی برابر با ۱ باشند تخمین $p$ برابر با ۱ خواهد بود. حال اگر برخی از $x_i$ها برابر با ۰ و برخی نیز برابر با ۱ باشند، در این صورت تخمین $p$ بین ۰ و ۱ خواهد بود. در حالت کلی اگر آن تعداد از $x_i$ها را که برابر با ۱ هستند با $m$ نشان دهیم، در این صورت $m=x_1+x_2+...+x_n$ بوده و لذا خواهیم داشت:

$$\frac{m}{n}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

بنابراین تخمین $p$ معادل با $\frac{m}{n}$ است. به همین ترتیب اگر بحث خود را معطوف به بعد از نمونه‌گیری کنیم، در این صورت مقدار $m$ معلوم بوده و بر اساس آن، تخمین $p$ به‌دست خواهد آمد. اما قبل از نمونه‌گیری، $m$ یک متغیر تصادفی خواهد بود، زیرا مقدار آن بعد از انجام آزمایش (نمونه‌گیری) معلوم خواهد شد و لذا $m$ یا $\frac{m}{n}$ تابعی از متغیرهای نمونه است:

$$\hat{p}=\frac{m}{n}=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$$

به چنین تابعی «تخمین‌زننده» و یا «برآوردکننده» یا «برآوردگر» و مقدار حاصل از این تابع را که بعد از نمونه‌گیری به‌دست می‌آید «تخمین» یا «برآورد» می‌گوییم. بنابراین تخمین‌زنندهٔ هر پارامتری مانند $\theta$ را با $\hat{\theta}$ نشان می‌دهیم که تابعی از متغیرهای نمونه است:

$$\hat{\theta}=f(X_1,X_2,\cdots,X_n) \qquad (۱-۳)$$

اما بدیهی است که برای پارامتر $\theta$ نمی‌توان هر تابع دلخواهی را به‌عنوان تخمین‌زننده تعریف نمود، بلکه هر تخمین‌زننده باید دارای خواصی باشد که در ادامه به آنها می‌پردازیم. برای به‌دست

آوردن تخمین‌زننده‌هایی که دارای خواص مناسبی باشند، روش‌هایی وجود دارد که ابتدا این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

### ۲-۵-۱ روش‌های تخمین

برای تخمین پارامترهای مورد نظر، روش‌هایی وجود دارد که هر یک دارای ویژگی‌ها و خواص خود هستند. در اینجا به بررسی این روش‌ها می‌پردازیم.

#### روش گشتاورها

روش گشتاورها بر مبنای این استدلال ساده قرار دارد که گشتاورهای هر توزیع، تابعی از پارامترهای آن توزیع می‌باشد و لذا می‌توان با حل چنین معادلاتی به تخمین پارامترها بر حسب گشتاورها رسید. به‌عنوان مثال اگر توزیعی فقط پارامتر $\theta$ را داشته باشد، در این صورت اولین گشتاور که همان میانگین می‌باشد، عبارت است از:

$$m_1 = E(X) = g(\theta)$$

حال اگر به‌جای $m_1$ مقدار آن را بر حسب اطلاعات نمونه قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\hat{m}_1 = g(\hat{\theta})$$

که $\hat{m}_1$ گشتاور مرتبه اول نمونه و $\hat{\theta}$ تخمین $\theta$ می‌باشد. از حل این معادله خواهیم داشت:

$$\hat{\theta} = h(\hat{m}_1)$$

حال اگر توزیعی دارای دو پارامتر باشد، در این صورت گشتاورهای مرتبه اول و دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$m_1 = E(X) = g_1(\theta_1, \theta_2)$$

$$m_2 = E(X^2) = g_2(\theta_1, \theta_2)$$

و با جایگذاری از اطلاعات نمونه به‌جای گشتاورهای جامعه، خواهیم داشت:

$$\hat{m}_1 = g_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$$

$$\hat{m}_2 = g_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$$

با حل این دو معادله برای پارامترهای $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ خواهیم داشت:

$$\hat{\theta}_1 = h_1(\hat{m}_1, \hat{m}_2)$$

$$\hat{\theta}_2 = h_2(\hat{m}_1, \hat{m}_2)$$

**مثال ۵-۱:** فرض کنید $X$ دارای توزیع یکنواخت است:

$$f(x)=\frac{1}{b} \qquad 0<x<b$$

پارامتر $b$ را با استفاده از روش گشتاورها به‌دست آورید.

$$m_1=E(X)=\int_0^b x\,\frac{1}{b}\,dx=\frac{x^2}{2b}\Big|_0^b=\frac{b}{2}$$

بنابراین به‌جای $m_1$ از $\hat{m}_1$ و به‌جای $b$ از $\hat{b}$ استفاده می‌کنیم.

$$\hat{m}_1=\frac{\hat{b}}{2} \Rightarrow \hat{b}=2\hat{m}_1$$

که $\hat{b}$ تابعی از $\hat{m}_1$ می‌باشد.

**مثال ۶-۱:** فرض کنید که $X$ دارای یکنواخت باشد:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\,;\, a<x<b$$

پارامترهای $a$ و $b$ را با استفاده از روش گشتاورها تخمین بزنید.

$$m_1=\int_a^b x\,\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}$$

$$m_2=\int x^2\,\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

که می‌توان آنها را به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{m}_1=\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}$$

$$\hat{m}_2=\frac{\hat{b}^2+\hat{a}\hat{b}+\hat{a}^2}{3}$$

با حل این معادلات، نتیجه می‌شود:

$$\hat{a}=\hat{m}_1+\sqrt{3(\hat{m}_2-\hat{m}_1^2)}$$

$$\hat{b}=\hat{m}_1-\sqrt{3(\hat{m}_2-\hat{m}_1^2)}$$

**روش حداکثر درستنمایی**

روش حداکثر احتمال یا حداکثر درستنمایی یکی از روش‌های مناسب برای برآورد پارامترها می‌باشد. مبنای این روش بر اساس استدلال زیر است:

فرض کنید $X$ دارای توزیع معینی باشد که فقط یک پارامتر $(\theta)$ دارد که آن را به‌صورت $P(x,\theta)$ نشان می‌دهیم. حال وقتی نمونه‌گیری را انجام دهیم، نتایج حاصل از نمونه‌گیری شامل مقادیر $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ می‌باشد. احتمال مشاهده شدن این نمونه، عبارت است از:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n) &= P(X_1 = x_1)\ldots P(X_n = x_n) \\ &= P(x_1,\theta)\ldots P(x_n,\theta) \end{aligned} \qquad (۱-۴)$$

بدیهی است که مقدار این احتمال بستگی به مقدار $\theta$ دارد، زیرا مقادیر متغیرهای تصادفی $X_1$، $X_2$، ... و $X_n$ معلوم شده‌اند و به‌جای آن، مقادیر $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$ را قرار داده‌ایم. مقدار پارامتر $\theta$ مجهول است که تعیین‌کننده مقدار این احتمال می‌باشد. لذا مقدار این احتمال در رابطهٔ (۴-۱) تابعی از $\theta$ است که آن را با $L(\theta)$ نشان می‌دهیم. $L(\theta)$ بیانگر «احتمال نمایان شدن نمونه مورد نظر» می‌باشد که به آن «تابع درستنمایی» می‌گوییم.

حال سؤال این است که از بین تمامی نمونه‌هایی که می‌توانستند نمایان شوند، چرا فقط این مقادیر (یعنی $x_1$، $x_2$، ... و $x_n$) مشاهده شده‌اند. دلیل آن ساده است، زیرا این مشاهدات، بیشترین احتمال یا شانس را برای نمایان شدن داشته‌اند. پس باید $L(\theta)$ بیانگر حداکثر احتمال باشد. لذا مقدار $\theta$ که بر حسب مشاهدات نمونه تعیین می‌شود باید به‌گونه‌ای باشد که احتمال مذکور را حداکثر نماید. برای حداکثر شدن $L(\theta)$، شرط زیر را به‌کار می‌بریم:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta} = g(x_1, x_2,\ldots,x_n) \qquad (۱\ ۵)$$

معمولاً بهتر است که ابتدا از $L(\theta)$ لگاریتم گرفته و سپس نسبت به $\theta$ مشتق بگیریم، زیرا آن مقدار از $\theta$ که لگاریتم $L$ را حداکثر نماید، $L$ را نیز حداکثر خواهد نمود.[1]

---

۱- اگر $f(x)$ دارای نقطه حداکثر باشد شرط لازم عبارت است از:

$$f'(x)=0$$

اما اگر $\ln f(x)$ را حداکثر کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$$

بنابراین در هر دو حالت، شرط لازم به‌صورت $f'(x)=0$ می‌باشد.

**مثال ۷-۱:** فرض کنید $X$ توزیع دونقطه‌ای دارد:

$$P(x)=p^{x}(1-p)^{1-x}$$

از این جامعه، نمونه‌ای به حجم $n$ انتخاب می‌شود. تخمین پارامتر $p$ با استفاده از روش حداکثر درستنمایی عبارت است از:

$$L(p)=P(x_1,p)...P(x_n,p)=p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}...p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}$$
$$=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$
$$\ln L(p)=\sum x_i \ln p+\left(n-\sum x_i\right)\ln(1-p)$$
$$\frac{\partial \ln L}{\partial p}=\sum x_i\frac{1}{p}+\left(n-\sum x_i\right)\frac{-1}{1-p}=0 \Rightarrow \hat{p}=\frac{\sum x_i}{n}=\bar{x}$$

بنابراین تابع $L(p)$ به‌ازای $\hat{p}=\frac{\sum X_i}{n}=\bar{X}$ حداکثر خواهد شد.

بدیهی است که اگر تعداد پارامترها بیشتر باشد مثلاً دو پارامتر $\theta_1$ و $\theta_2$ داشته باشیم، در این صورت تابع درستنمایی تابعی از $\theta_1$ و $\theta_2$ است که نسبت به هر دو مشتق گرفته و تخمین‌زننده آنها را به‌دست می‌آوریم.

**روش حداقل مربعات معمولی**

این روش یکی از روش‌های مهم در تخمین پارامترها می‌باشد که عمدتاً برای تخمین معادلات رگرسیون به‌کار می‌رود. جزئیات این روش در فصل‌های بعدی ارائه خواهد شد.

### ۳-۵-۱ خواص تخمین‌زننده‌ها

از آنجا که برای تخمین یک پارامتر می‌توان تخمین‌زننده‌های متعددی را معرفی نمود، لذا بایستی مناسب‌ترین تخمین‌زننده‌ها را انتخاب نماییم. بنابراین، باید شرایط و خواصی را برای یک تخمین‌زننده خوب تعریف کنیم تا بر اساس چنین معیارهایی بتوان در مورد میزان خوبی یک تخمین‌زننده داوری نمود.

دانشگاه آزاد اسلامی
کتابخانه
معاونت پژوهش و فناوری

**بدون تورش یا ناریب بودن**[1]

اگر امید ریاضی یک تخمین‌زننده برابر با پارامتر مورد نظر باشد، آن را تخمین‌زننده بدون تورش (ناریب) گویند:

$$E(\hat{\theta})=\theta \qquad (۱-۶)$$

به‌عبارت دیگر خاصیت ناریبی به‌صورت $E(\hat{\theta})-\theta=0$ است و اگر تخمین‌زننده دارای اریب باشد، این رابطه به‌صورت $E(\hat{\theta})-\theta=B$ می‌باشد که $B$ مقدار تورش (اریب) را نشان می‌دهد.

**مثال ۸-۱:** فرض کنید $X$ دارای توزیع پوآسن با پارامتر $\lambda$ باشد. برای تخمین $\lambda$ از تابع نمونه‌ای یا آماره $\hat{\lambda}=\overline{X}=\frac{\sum x_i}{n}$ استفاده می‌کنیم. می‌توان ثابت نمود که $\overline{X}$ یک تخمین‌زنندهٔ ناریب برای $\lambda$ است:

$$E(\hat{\lambda})=E(\overline{X})=E\left(\frac{\sum(X_i)}{n}\right)=\frac{\sum E(X)}{n}=\frac{\sum\lambda}{n}=\frac{n\lambda}{n}=\lambda$$

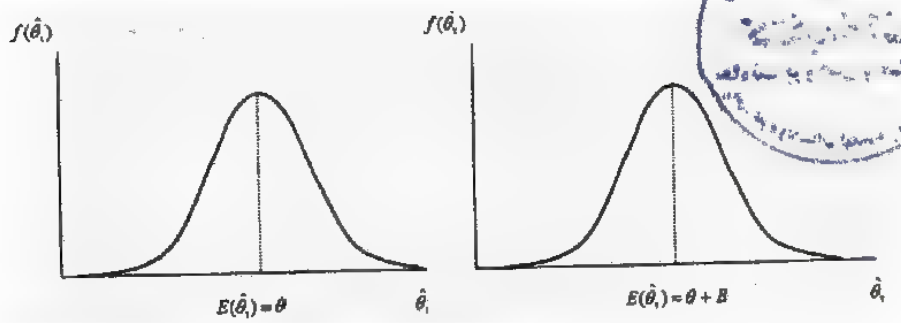
مفهوم بدون تورش بدین معنا است که تخمین‌زننده «به‌طور متوسط» به پارامتر مورد نظر گرایش دارد. در چنین حالتی، مرکز توزیع $\hat{\theta}$ درست بر روی $\theta$ قرار دارد و لذا مقدار حاصل از $\hat{\theta}$ به‌طور متوسط به $\theta$ نزدیک خواهد بود. اگر دو تخمین‌زننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ برای $\theta$ داشته باشیم، نمودار الف تخمین بدون تورش را نشان می‌دهد که مقدار $\hat{\theta}_1$ به‌طور متوسط برابر با $\theta$ است، ولی نمودار ب تخمین با تورش را نشان می‌دهد که مقدار $\hat{\theta}_2$ به‌طور متوسط برابر با $\theta+B$ است. لذا $\hat{\theta}_2$ مقدار $\theta$ را به‌طور متوسط به اندازه $B$ بیش از حد و یا کمتر از حد، برآورد می‌کند.

از طرف دیگر برای تخمین‌زننده‌ای که با افزایش حجم نمونه، مقدار تورش آن کوچک شده و به صفر میل کند، آن را «تخمین‌زنندهٔ بدون تورش حدی» می‌گویند.

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta})=\theta \quad \text{یا} \quad \lim_{n\to\infty} B=0 \qquad (۱-۷)$$

---

[1] unbiased




نمودار (الف) نمودار (ب)

نمودار ۱-۱: تخمین‌زننده‌های بدون تورش و باتورش

**مثال ۹-۱:** برای تخمین واریانس در جامعه‌ای با توزیع نرمال، نمونه‌ای تصادفی به حجم $n$ انتخاب می‌شود. تخمین‌زننده واریانس را به‌صورت $\tilde{S}^2=\frac{(x_i-\bar{X})^2}{n}$ معرفی می‌کنیم. آیا $\tilde{S}^2$ یک تخمین‌زننده نااریب است؟

بدین منظور از رابطه $\tilde{S}^2$ و توزیع کای‌دو ( $\chi^2$ ) استفاده می‌کنیم:[1]

$$\tilde{S}^2=\frac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1}$$

$$E(\tilde{S}^2)=E(\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1})=\frac{\sigma^2}{n}E(\chi^2_{n-1})=\frac{\sigma^2}{n}(n-1)=\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}$$

مقدار

$$E(\tilde{S}^2)-\sigma^2=-\frac{\sigma^2}{n}$$

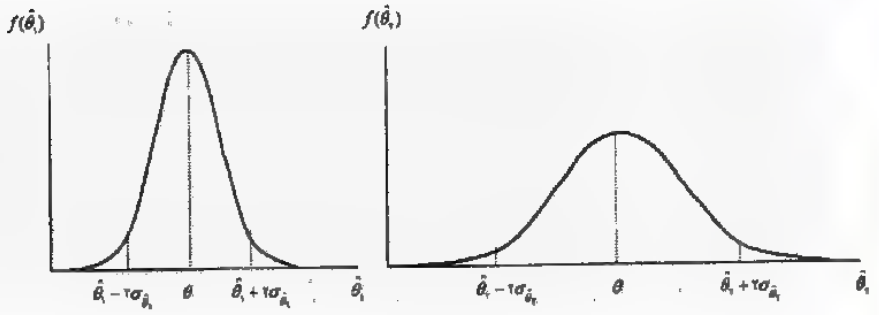
تورش $\tilde{S}^2$ برابر با $-\frac{\sigma^2}{n}$ است. به‌عبارت دیگر $\tilde{S}^2$ به‌طور متوسط مقدار $\sigma^2$ را به اندازه $\frac{\sigma^2}{n}$ کمتر از «حد واقعی» برآورد می‌کند. اما چون $\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=0$ است، لذا بدون اریب مجانبی می‌باشد.

**کارایی (حداقل واریانس)**

یکی دیگر از ویژگی‌های تخمین‌زننده‌ها، کوچک بودن واریانس است. برای توضیح این مطلب، فرض کنید برای تخمین پارامتر $\theta$ دو تخمین‌زننده $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ داریم که هر دو بدون تورش، ولی واریانس $\hat{\theta}_1$ کمتر از $\hat{\theta}_2$ باشد.

---

[1] توزیع کای‌دو در بخش ۲-۷-۱ ارائه شده است.




نمودار ۲-۱: کارایی تخمین‌زننده‌ها

نمودار فوق نشان می‌دهد که $\hat{\theta}_1$ دارای واریانس کمتری است، لذا تمامی مقادیر ممکن آن در مقایسه با $\hat{\theta}_2$ به $\theta$ نزدیکتر هستند. هر تخمین‌زننده‌ای که دارای واریانس کمتری باشد، دارای کارایی بیشتری است. در اینجا کارایی $\hat{\theta}_2$ در مقایسه با $\hat{\theta}_1$ برابر است با:

$$\text{ضریب کارایی } \hat{\theta}_2 \text{ در مقایسه با } \hat{\theta}_1 = \frac{\text{var}(\hat{\theta}_1)}{\text{var}(\hat{\theta}_2)} \qquad (۱-۸)$$

به‌عنوان مثال، اگر واریانس $\hat{\theta}_2$ برابر با ۵ و واریانس $\hat{\theta}_1$ برابر با ۳ باشد، در این صورت کارایی $\hat{\theta}_2$ در مقایسه با $\hat{\theta}_1$ برابر با ۰/۶ ($=\frac{3}{5}$) یا ۶۰ درصد است. این بدان معنا است که کارایی $\hat{\theta}_2$ در نمونه‌ای به حجم ۱۰۰ مشابه کارایی $\hat{\theta}_1$ در نمونه‌ای به حجم ۶۰ می‌باشد.

حال فرض کنید که از بین تمامی تخمین‌زننده‌های $\theta$، تخمین‌زننده‌ای مانند $\hat{\theta}_*$ وجود داشته باشد که دارای کمترین واریانس باشد. بدیهی است که $\hat{\theta}_*$ کارآترین تخمین‌زننده خواهد بود. حال سایر تخمین‌زننده‌های $\theta$ را با $\hat{\theta}_*$ مقایسه می‌کنیم. بنابراین ضریب کارایی هر تخمین‌زنندهٔ دلخواه مانند $\hat{\theta}_i$ برابر است با:

$$\text{ضریب کارایی } \hat{\theta}_i = \frac{\text{var}(\hat{\theta}_*)}{\text{var}(\hat{\theta}_i)} \leq 1 \qquad (۱-۹)$$

نامساوی کرامر- رائو، حد پایین واریانس تخمین‌زننده‌های $\theta$ است:

$$\text{var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{E[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)]^2} \qquad (۱-۱۰)$$

واریانس کاراترین تخمین زننده برابر با حد پایین این نامساوی است.

**مثال ۱۰-۱:** برای تخمین پارامتر $\mu$ در جامعه‌ای با توزیع نرمال، نمونه‌ای به حجم $n$ انتخاب می‌شود. ضریب کارایی $\overline{X}$ به‌عنوان تخمین‌زننده $\mu$ را حساب کنید.

$$L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow \ln L=-n\ln\sqrt{2\pi}\sigma-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2}\Rightarrow E\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}\right]=E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2}\right]^2$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}E(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}{\sigma^4}=\frac{n}{\sigma^2}$$

توجه شود که در محاسبه امید ریاضی $\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\right)^2$، امید ریاضی حاصل‌ضرب جملات متقاطع $\left(\sum_i\sum_j(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right)$ برابر صفر است، زیرا $X_i$ها مستقل‌اند. بدین ترتیب، کمترین واریانس برای تخمین‌زننده‌های میانگین در یک جامعه نرمال برابر با $\frac{\sigma^2}{n}$ است.

**سازگاری**

سازگاری یکی از خواص مجانبی تخمین‌زننده‌ها است و بدین معناست که اگر حجم نمونه افزایش یابد، احتمال اینکه تفاضل $\hat{\theta}$ از $\theta$ از هر عدد حقیقی مانند $\varepsilon$ کمتر باشد، برابر با ۱ خواهد بود.

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1 \qquad (۱-۱۱)$$

این خاصیت بیانگر این است که وقتی حجم نمونه افزایش یابد، مقدار $\hat{\theta}$ کاملاً به $\theta$ نزدیک خواهد شد. شرط فوق را اصطلاحاً «همگرایی در احتمال» می‌گویند و با علامت plim نشان می‌دهند:

$$\text{plim}\hat{\theta}=\theta \qquad (۱-۱۲)$$

معادل این را می‌توان برحسب واریانس بیان نمود، زیرا واریانس نیز بیانگر انحراف $\hat{\theta}$ از $E(\hat{\theta})$ است. اگر تخمین زننده بدون تورش حدی باشد آنگاه شرایط زیر را تأمین می‌کند:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta})=\theta \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(\hat{\theta})=0 \qquad (۱-۱۳)$$

اگر با افزایش حجم نمونه، واریانس $\hat{\theta}$ به سمت صفر میل کند، بدین معناست که انحراف $\hat{\theta}$ از $\theta$ به صفر خواهد رسید.

**مثال ۱۱-۱:** برای تخمین میانگین جامعه نرمال، $\bar{X}$ یک تخمین‌زنندهٔ سازگار است.

$$\mathrm{var}(\bar{X})=\mathrm{var}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right)=\frac{\sum \mathrm{var}(X_i)}{n^2}=\frac{\sum \sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(\bar{X})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n}=0$$

**مثال ۱۲-۱:** برای تخمین واریانس جامعه نرمال، $\tilde{S}^2$ یک تخمین‌زنندهٔ باتورش اما سازگار است.

$$\tilde{S}^2=\frac{\sum(X_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1}$$

$$\mathrm{var}(\tilde{S}^2)=\mathrm{var}\left(\frac{\sigma^2}{n}\chi^2_{n-1}\right)=\frac{\sigma^4}{n^2}\mathrm{var}(\chi^2_{n-1})=\frac{\sigma^4}{n^2}2(n-1)=2\sigma^4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(\tilde{S}^2)=\lim_{n\to\infty} 2\sigma^4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$$

## کفایت

$\hat{\theta}$ را یک تخمین‌زنندهٔ کافی برای $\theta$ گویند اگر $\hat{\theta}$ از تمام اطلاعات نمونه که مربوط به برآورد $\theta$ است استفاده کند. این تعریف معادل است با اینکه توزیع مشترک $X_i$ ها (اطلاعات نمونه) به شرط $\hat{\theta}$ مستقل از $\theta$ باشد. توزیع مشترک $X_i$ ها به شرط $\hat{\theta}$ که با $f(x_1,\ldots,x_n|\hat{\theta})$ نشان داده می‌شود بایستی مستقل از $\theta$ باشد. اگر این احتمال بستگی به $\theta$ داشته باشد، آنگاه مشاهده یک نمونهٔ خاص بستگی به $\theta$ دارد. حال اگر این احتمال مستقل از $\theta$ باشد، آنگاه نمونه خاصی مانند $(x_1,\ldots,x_n)$ که منجر به برآورد $\theta$ می‌شوند، برای هر مقدار از $\theta$ احتمال یکسانی با سایر نمونه‌ها دارد. احتمال مذکور را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x_1,\ldots,x_n|\hat{\theta})=\frac{f(x_1,\ldots,x_n,\hat{\theta})}{f(\hat{\theta})} \qquad (۱-۱۴)$$

**مثال ۱۳-۱:** فرض کنید $X$ توزیع دو نقطه‌ای به‌صورت $P(x)=p^x(1-p)^{1-x}$ دارد ($x=0,1$). تابع احتمال مشترک $X_i$ ها (تابع درستنمایی) عبارت است از:

$$f(x_1,\dots,x_n,p)=f(x_1|p)\dots f(x_n|p)$$
$$=p^{x_1}(1-p)^{1-x_1}\dots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n}=p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}$$
$$=p^y(1-p)^{n-y} \quad ; \quad y=\sum_{i=1}^{n}x_i$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $\hat{p}=\frac{y}{n}$ توزیع دوجمله‌ای دارد.

$$P(\hat{p})=p(\frac{y}{n})=P(y)=C_n^y p^y(1-p)^{n-y}$$

حال $f(x_1,\dots,x_n|\hat{p})$ را می‌نویسیم:

$$f(x_1,\dots,x_n|\hat{p})=\frac{f(x_1,\dots,x_n,p)}{f(\hat{p})}=\frac{p^y(1-p)^{n-y}}{C_n^y p^y(1-p)^{n-y}}$$
$$=\frac{1}{C_n^y}=\frac{1}{C_n^{\sum x_i}}$$

که بستگی به $p$ ندارد. لذا $\hat{p}=\frac{y}{n}$ یک تخمین‌زننده کافی برای $p$ است.

از طرف دیگر می‌توان شرط (۱۴-۱) را برای $\hat{\theta}$ به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x_1,\dots,x_n,\theta)=g(\hat{\theta},\theta)h(x_1,\dots,x_n) \qquad (۱-۱۵)$$

سمت چپ همان تابع درستنمایی است. در سمت راست، $g$ تابعی از $\hat{\theta}$ و $\theta$ است ولی $h$ فقط تابعی از اطلاعات نمونه است.

**مثال ۱۴-۱:** $X$ توزیع نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ دارد. با فرض معلوم بودن $\sigma^2$، برای برآورد $\mu$ نمونه‌ای با حجم $n$ انتخاب می‌کنیم. نشان دهید که $\overline{X}$ تخمین‌زننده کافی برای $\mu$ است. ابتدا تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x_1,\dots,x_n,\mu)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حال تابع درستنمایی را تجزیه می‌کنیم. بدین‌منظور ابتدا عبارت $\sum(x_i-\mu)^2$ را تجزیه می‌کنیم:

$$\sum(x_i-\mu)^2=\sum[(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\mu)]=\sum(x_i-\bar{x})^2+n(\bar{x}-\mu)^2$$

زیرا $\sum(\bar{x}-\mu)^2=n(\bar{x}-\mu)^2$ و $\sum[(x_i-\bar{x})(\bar{x}-\mu)]=0$ است. طبق نتیجهٔ فوق، تابع درستنمایی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x_1,\ldots,x_n,\mu)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma/\sqrt{n}}e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2/n}}\right]\left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}\sqrt{n}\,\sigma^{n-1}}e^{-\frac{\sum(x_i-x)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

در سمت راست، کروشه اول تابعی از $\bar{X}$ و $\mu$ است که همان $g(\bar{X},\mu)$ می‌باشد و کروشه دوم فقط تابعی از $X_i$ ها (اطلاعات نمونه) است که تابعی از $\mu$ نیست. بنابراین، $\bar{X}$ تخمین‌زنندهٔ کافی برای $\mu$ است.

### ۴-۵-۱ تخمین فاصله‌ای

آنچه تاکنون بحث شد معروف به «تخمین‌نقطه‌ای» است. این روش، راجع به اینکه تخمین به‌دست آمده تا چه اندازه قابل اطمینان است، بحثی نمی‌کند. در «تخمین فاصله‌ای» برای هر پارامتر، دامنه‌ای به‌دست می‌آید که همراه با یک احتمال است. این احتمال بیانگر سطح اطمینانی است که به فاصله مذکور داریم. بدین لحاظ به آن «فاصله اطمینان» گفته می‌شود. مثلاً اگر با احتمال ۹۵ درصد این فاصله را بسازیم به آن «فاصله اطمینان ۹۵ درصدی» می‌گویند.

برای به‌دست آوردن تخمین فاصله‌ای برای پارامتر $\theta$ باتوجه به اینکه $\hat{\theta}$ تخمین‌زنندهٔ $\theta$ است، احتمال زیر را تعریف می‌کنیم:

$$P(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1-\alpha \qquad (۱-۱۶)$$

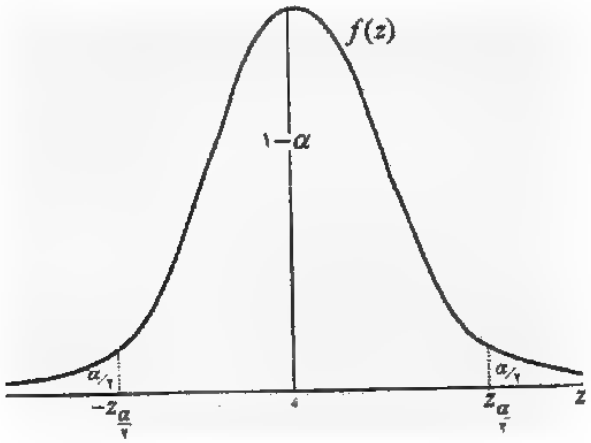
$1-\alpha$ بیانگر سطح اطمینان می‌باشد. احتمال فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}&P(-\varepsilon<\hat{\theta}-\theta<\varepsilon)=1-\alpha\\&P(\hat{\theta}-\varepsilon<\theta<\hat{\theta}+\varepsilon)=1-\alpha\end{aligned} \qquad (۱-۱۷)$$

بنابراین فاصلهٔ $(\hat{\theta}-\varepsilon,\hat{\theta}+\varepsilon)$ با احتمال $1-\alpha$، پارامتر $\theta$ را در بر خواهد گرفت. توجه شود که فاصله $(\hat{\theta}-\varepsilon,\hat{\theta}+\varepsilon)$ یا به‌طور خلاصه $\hat{\theta}\pm\varepsilon$ را «تخمین‌زننده فاصله‌ای» می‌گوییم. زیرا $\hat{\theta}$ تابعی از متغیرهای تصادفی است. مقدار حاصل از تخمین‌زنندهٔ فاصله‌ای را «تخمین فاصله‌ای» می‌گوییم.

$\varepsilon$ نقش مهمی در تعیین طول فاصله اطمینان دارد. طول فاصله اطمینان برابر با $2\varepsilon$ است، زیرا تفاضل حد بالا $(\hat{\theta}+\varepsilon)$ و حد پایین $(\hat{\theta}-\varepsilon)$ را نشان می‌دهد. اما برای تعیین $\varepsilon$ الزاماً باید رابطه $\hat{\theta}$ را با یکی از توزیع‌های شناخته شده پیدا کنیم تا بتوان از جداول آنها استفاده نمود. به‌عنوان مثال یکی از توزیع‌های شناخته شده، توزیع نرمال استاندارد است. برای $Z$ می‌توان احتمال زیر را تعریف نمود:

$$P(-Z_{\frac{\alpha}{2}} \le Z \le Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \quad \text{یا} \quad P(|Z_{\overline{X}}|<Z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\alpha \qquad (1-18)$$




نمودار ۳ ۱: توزیع نرمال و تخمین فاصله‌ای

به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم برای میانگین جامعه نرمال $(\mu)$ تخمین فاصله‌ای بسازیم، از $\overline{X}$ استفاده می‌کنیم که استاندارد شدهٔ آن $Z=(\overline{X}-\mu)\Big/(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ است. به‌جای $Z$ قرار داده و آن را ساده می‌کنیم:

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha \Rightarrow P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X}-\mu < Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

بنابراین، $\varepsilon=Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ است و تخمین فاصله‌ای برابر است با:

$$P\left(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

و یا

$$\left(\overline{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

### ۶-۱ آزمون فرضیه

آزمون فرضیه در مورد توزیع متغیر تصادفی و پارامترهای آن بحث می‌کند. این آزمون ممکن است راجع به نوع توزیع (مثلاً نرمال بودن و..) باشد یا راجع به پارامترهای این توزیع و یا مقایسه برخی از ویژگی‌های دو یا چند متغیر تصادفی باشد. هر آزمون فرضیه‌ای دارای سه مرحله است:

۱- طرح فرضیه: فرضیه‌های آماری معمولاً به‌صورت دو فرضیه مطرح می‌شوند: یکی فرضیه صفر ($H_0$) و دیگری فرضیه رقیب ($H_1$) می‌باشد. به‌عنوان مثال فرضیه صفر بیانگر آن است که نرخ بیکاری ($p$) برابر با ۰/۲ است، اما فرضیه رقیب می‌گوید که نرخ بیکاری ۰/۱۵ می‌باشد. این فرضیه‌ها به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$H_0: p=0/2$$
$$H_1: p=0/15$$

اما می‌توان هر یک از حالات زیر را به‌عنوان فرضیه صفر و رقیب در نظر گرفت:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $H_0: p=0/2$ | $H_0: p=0/2$ | $H_0: p=0/2$ | $H_0: p\geq 0/2$ | $H_0: p\leq 0/2$ |
| $H_1: p>0/2$ | $H_1: p<0/2$ | $H_1: p\neq 0/2$ | $H_1: p<0/2$ | $H_1: p>0/2$ |

معمولاً در طرح فرضیه‌ها، کل مقادیر مربوط به یک پارامتر را به دو قسمت تقسیم می‌کنند که یک قسمت را $H_0$ و قسمت دیگر را $H_1$ پوشش می‌دهد.

۲- معیار آزمون یا آماره آزمون: در این مرحله، قواعد و معیارهایی به‌کار گرفته می‌شود که بر اساس آن بتوان راجع به رد یا عدم رد فرضیه صفر($H_0$) تصمیم‌گیری نمود. انتخاب این معیارها معادل با معرفی یک آماره است که بتواند اطلاعاتی در خصوص فرضیه‌ها ارائه نماید. در این خصوص دو نکته را باید در نظر داشت: اولاً این آماره باید با فرضیه مورد نظر ارتباط داشته باشد. مثلاً اگر فرضیه ما راجع به میانگین جامعه است بایستی از میانگین نمونه ($\overline{X}$) و اگر راجع‌به

واریانس است بایستی از واریانس نمونه ($S^2$) استفاده نمود. ثانیاً آماره معرفی شده بایستی با یکی از توزیعهای معروف ( $Z$، $t$، $\chi^2$ و $F$ ) رابطه داشته باشد تا بتوان از جداول آنها استفاده نمود.[1]

۳- قاعده‌ی تصمیم‌گیری: قاعده تصمیم‌گیری را می‌توان بدین صورت مطرح کرد که اگر آماره معرفی شده به اندازه کافی نزدیک به مقدار تعریف شده در فرضیه $H_0$ باشد، در این صورت $H_0$ را رد نمی‌کنیم. اما اگر به اندازه کافی از $H_0$ دور باشد، آن را رد می‌کنیم. بدین منظور بایستی یک عدد بحرانی تعیین کنیم که بتواند معیاری برای نزدیکی یا دوری از فرضیه $H_0$ باشد.

**مثال ۱۵-۱:** فرض کنید از جامعه ای نرمال (مثلاً نمرات درس آمار دانشجویان) نمونه‌ای به حجم $n$ انتخاب نموده ایم و می‌خواهیم راجع به میانگین این جامعه ( $\mu$ ) قضاوت کنیم. این آزمون را در سه مرحله انجام می‌دهیم:

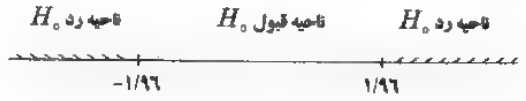
۱- فرضیه را مطرح می‌کنیم (فرضیه صفر این است که میانگین نمرات برابر با ۱۴ است):

$$H_0: \mu = ۱۴$$

$$H_1: \mu \neq ۱۴$$

۲- برای قضاوت راجع به این فرضیه میانگین نمونه ($\bar{X}$) را معرفی می‌کنیم. از طرف دیگر می‌دانیم که $\bar{X}$ توزیع نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ دارد. بنابراین اگر $\bar{X}$ را استاندارد کنیم به توزیع نرمال استاندارد $Z=(\bar{X}-\mu)/(\sigma^2/n)$ می‌رسیم. اما اگر $\sigma^2$ مجهول باشد، توزیع $t$ به‌دست می‌آید.

۳- برای تعیین عدد بحرانی یا ناحیه بحرانی از جدول $Z$ یا $t$ استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال اگر با احتمال ۰/۰۵ بخواهیم این فرضیه را آزمون کنیم آنگاه $Z_{0.025}=1/96$ است. نحوهٔ تصمیم‌گیری به‌صورت زیر است:




**خطای نوع اول و نوع دوم**

طبق بحث فوق، $\alpha$ درصد احتمال دارد که آماره مورد نظر در ناحیه بحرانی قرار گیرد، ولی می‌تواند همراه با «درست بودن یا غلط بودن $H_0$» باشد. اگر $H_0$ درست باشد و آماره مورد نظر در ناحیه بحرانی قرار گیرد و آن را رد کنیم، آنگاه دچار یک خطا شده‌ایم که معروف به «خطای نوع

[1] این توزیع‌ها در بخش ۷-۱ معرفی شده‌اند.

اول» است. به‌طور کلی در آزمون فرضیه، دو نوع خطا وجود دارد که معروف به خطای نوع اول و خطای نوع دوم می‌باشند.

**خطای نوع اول: رد $H_0$ درست یا قبول $H_1$ غلط**

**خطای نوع دوم: رد $H_1$ درست یا قبول $H_0$ غلط**

## ۱-۷ مروری بر توزیع‌های مهم

در بخش‌های قبلی، متغیرهای تصادفی، تابع احتمال مشترک نمونه (تابع درستنمایی) و تابعی از متغیرهای نمونه را معرفی کردیم. در این بخش برخی از انواع مهم این توابع را معرفی می‌کنیم که نقش مهمی در آزمون فرضیه و سایر استنتاج‌های آماری دارند.

### ۱-۷-۱ توزیع نرمال استاندارد

اگر متغیر تصادفی $X$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ باشد، آنگاه استاندارد شدهٔ آن را نرمال استاندارد می‌گویند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1) \qquad (1-19)$$

لذا $Z$ دارای میانگین ۰ و واریانس ۱ بوده و تابع چگالی آن نیز به‌صورت زیر است:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad , \quad -\infty<z<+\infty \qquad (1-20)$$

برای محاسبه مقادیر توزیع نرمال از جدول توزیع نرمال استاندارد استفاده می‌شود.

### ۱-۷-۲ توزیع کای‌دو

این توزیع که نقش مهمی در استنتاج آماری دارد از مجموع مجذور نرمال استاندارد به‌دست می‌آید. بدین منظور فرض کنید از جامعه‌ای که متغیر تصادفی $X$ توزیع نرمال با میانگین $\mu$ و واریانس $\sigma^2$ دارد، نمونه‌ای به حجم $n$ انتخاب می‌شود. در این صورت هریک از متغیرهای تصادفیِ نمونه دارای توزیع نرمال هستند و استانداردشدهٔ آنها نیز توزیع نرمال خواهد داشت:

$$X_i\sim N(\mu,\sigma^2) \quad i=1,\cdots,n \;\Rightarrow\; Z_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1) \qquad (1-21)$$

اگر $\mu$ مجهول باشد به جای آن از میانگین نمونه یعنی $\overline{X}$ استفاده می‌شود.

حال تابع جدیدی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y=Z_1^2+\cdots+Z_n^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \qquad (۱-۲۲)$$

با فرض معلوم بودن $\mu$ و $\sigma^2$ این تابع دارای توزیع خاصی به‌نام کای‌دو یا توان دوم کای می‌باشد که آن را با $\chi_n^2$ نشان می‌دهند.[1] در اینجا $n$ را درجه آزادی می‌گویند و بیانگر تعداد متغیرهایی است که مقادیر خود را بدون هیچ محدودیتی اختیار می‌کنند.

اگر در جامعه اصلی میانگین مجهول باشد، آنگاه $Y$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y=Z_1^2+\cdots+Z_n^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2} \qquad (۱-۲۳)$$

این تابع نیز توزیع کای‌دو دارد. اما درجه آزادی آن $n-1$ است زیرا یک محدودیت به‌صورت $\sum(X_i-\overline{X})=0$ وجود دارد که باعث می‌شود یکی از متغیرها نتواند مقدار خود را آزادانه انتخاب نماید. توزیع $\chi_k^2$ با درجه آزادی $k$ دارای امیدریاضی $k$ و واریانس $2k$ می‌باشد.

یکی از نکات مهم در مورد توزیع کای‌دو، رابطه آن با واریانس نمونه است:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}=\frac{\sigma^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\frac{\sigma^2}{n-1}\chi_{n-1}^2\Rightarrow\frac{S^2}{\sigma^2}=\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1} \qquad (۱-۲۴)$$

توزیع $\chi^2$ هم جمع‌پذیر و هم تجزیه‌پذیر است. بدین معنی که حاصل‌جمع دو توزیع کای‌دو با درجه آزادی‌های $k_1$ و $k_2$ دارای توزیع کای‌دو با درجه آزادی $k_1+k_2$ می‌باشد. از طرف دیگر

---

۱- تابع چگالی $\chi_k^2$ با درجه آزادی $k$ که مقادیر آن را با $y$ نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$f_{\chi^2}(y)=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}y^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\ ;\quad y>0$$

در واقع توزیع $\chi^2$ حالت خاصی از توزیع گاما است که در آن، $\alpha=\frac{k}{2}$ و $\beta=\frac{1}{2}$ است.

توزیع کای‌دو با درجه آزادی $k$ را می‌توان به دو توزیع کای‌دو با درجه آزادی‌های $k_1$ و $k_2$ تجزیه نمود به‌گونه‌ای که $k=k_1+k_2$ باشد.

توزیع $\chi^2$ را می‌توان به‌صورت ماتریسی نیز به‌دست آورد. بدین منظور فرض کنید که $\mathbf{x}$ بردار متغیرهای نرمال باشد:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad , \quad E(X_i)=\mu_i \quad , \quad \mathrm{var}(X_i)=\sigma_i^2 \quad , \quad \mathrm{cov}(X_i,X_j)=0 \qquad (۱-۲۵)$$

شرط $\mathrm{cov}(X_i,X_j)=0$ بیانگر استقلال $X_i$ و $X_j$ است. امید ریاضی و واریانس بردار $\mathbf{x}$ عبارت است از:

$$E(\mathbf{x})=E\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix}=\boldsymbol{\mu} \qquad (۱-۲۶)$$

$$\mathrm{var}(\mathbf{x})=E\left[(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\right]=E\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ \vdots \\ X_n-\mu_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 & \cdots & X_n-\mu_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & \cdots & E[(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n)] \\ \vdots & & \vdots \\ E[(X_n-\mu_n)(X_1-\mu_1)] & \cdots & E(X_n-\mu_n)^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}=\boldsymbol{\Omega} \qquad (۱-۲۷)$$

بنابراین، $\boldsymbol{\Omega}$ ماتریس قطری است که عنصر تام آن برابر با واریانس $X_i$ است.

با استفاده از محاسبات و نتایج فوق، خواهیم داشت:

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\sim\chi^2 \qquad (۱-۲۸)$$

$\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ برابر است با:

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2} \end{bmatrix} \qquad (۱-۲۹)$$

با جایگذاری به‌جای $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ و $\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}$، خواهیم داشت:

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})=\begin{bmatrix}X_1-\mu_1 & \cdots & X_n-\mu_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1-\mu_1\\ \vdots\\ X_n-\mu_n\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}Z_i^2 \qquad (۱-۳۰)$$

بنابراین، عبارت فوق برابر با مجموع مجذور نرمال‌های استاندارد است که توزیع $\chi^2$ خواهد داشت.

### ۳-۷-۱ توزیع t

توزیع $t$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$t_k=\frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi_k^2}{k}}} \qquad (۱-۳۱)$$

$Z$ نرمال استاندارد و $\chi_k^2$ نیز توزیع کای‌دو با درجه آزادی $k$ می‌باشد.

به‌عنوان مثال اگر از جامعه‌ای نرمال، نمونه‌ای به حجم $n$ انتخاب شود، در این صورت $\overline{X}$ و $S^2$ عبارتند از:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} \quad , \quad S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$$

حال $\overline{X}$ را استاندارد کرده و $S^2$ را نیز بر حسب $\chi^2$ می‌نویسیم:

$$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \quad , \quad \frac{S^2}{\sigma^2}=\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1} \qquad (۱-۳۲)$$

توجه شود که $E(\overline{X})=\mu$ و $\mathrm{var}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ می‌باشد.

حال توزیع $t$ را تشکیل می‌دهیم:

$$t_{n-1} = \frac{Z_{\hat{X}}}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} \qquad (۱-۳۳)$$

با جایگذاری به‌جای $Z_{\overline{X}}$ و $\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}$ و مرتب نمودن آن خواهیم داشت:

$$t_{n-1} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{S} \qquad (۱-۳۴)$$

اگر نتیجهٔ به‌دست آمده را با $Z_X = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$ مقایسه کنیم مشاهده می‌شود که $t$ شباهت زیادی به $Z$ دارد و تنها تفاوت آنها در این است که به‌جای $\sigma$ (انحراف معیار جامعه) از $S$ (انحراف معیار نمونه) استفاده شده است.

### ۱-۷-٤ توزیع F

توزیع $F$ کاربردهای بسیاری در مباحث اقتصاد سنجی، به ویژه در آزمون فرضیه‌ها، مقایسه رگرسیون‌ها و یا مقایسه اثر عوامل مختلف بر یک متغیر دارد. توزیع $F$ از تقسیم دو توزیع کای‌دو به‌دست می‌آید:

$$F_{k_1, k_2} = \frac{\chi^2_{k_1}}{k_1} \Big/ \frac{\chi^2_{k_2}}{k_2} \qquad (۱-۳۵)$$

توزیع $F$ دارای دو درجه آزادی می‌باشد که یکی مربوط به‌صورت کسر و دیگری مربوط به مخرج کسر است. با توجه به رابطه $\chi^2$ و $S^2$ می‌توان توزیع $F$ را به‌صورت نسبت واریانس‌های نمونه نوشت. فرض کنید از دو جامعه، نمونه‌هایی به حجم $n_1$ و $n_2$ انتخاب شود. در این صورت طبق رابطه (۱-۳۲)، روابط زیر را داریم:

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} = \frac{\chi^2_{n_1-1}}{n_1-1} \quad \text{و} \quad \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} = \frac{\chi^2_{n_2-1}}{n_2-1}$$

با جایگذاری در $F$ و مرتب نمودن آن خواهیم داشت:

$$F_{n_1-1, n_2-1} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad (۱-۳۶)$$

### ۱-۷-۵ حالت‌های خاص توزیع‌های $\chi^2$ ، t و F

حالت‌های خاص توزیع‌های $\chi^2$ ، $t$ و $F$ وهمچنین روابط آنها عبارت است از:

۱ ـ اگر درجه آزادی کای‌دو به سمت بی‌نهایت میل کند، خواهیم داشت:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\chi_k^2}{k}=1 \qquad (۱-۳۷)$$

۲ ـ اگر درجه آزادی کای‌دو بزرگتر از ۳۰ باشد، می‌توان از توزیع نرمال به‌عنوان تقریب مناسبی برای آن استفاده نمود:

$$\chi_k^2 \underset{k\to\infty}{\sim} N(k,2k) \qquad (۱-۳۸)$$

اما چون توزیع کای‌دو به‌کندی به توزیع نرمال گرایش دارد از تبدیل فیشر استفاده می‌شود که طبق آن رابطه زیر برقرار است:

$$\sqrt{2\chi_k^2} \underset{k>30}{\sim} N(\sqrt{2k-1},1)$$

بنابر این، استاندارد شدهٔ آن عبارت است از:

$$Z=\frac{\sqrt{2\chi_k^2}-\sqrt{2k-1}}{1}=\sqrt{2\chi_k^2}-\sqrt{2k-1} \underset{k>30}{\sim} N(0,1) \qquad (۱-۳۹)$$

مقادیر توزیع کای‌دو برابر است با:

$$\sqrt{2\chi_k^2}=Z+\sqrt{2k-1} \Rightarrow \chi_k^2=\frac{1}{2}\left(Z+\sqrt{2k-1}\right)^2 \qquad (۱-۴۰)$$

به‌عنوان مثال، مقدار ۵ درصدی توزع کای‌دو با درجه آزادی $k=40$ بابر است با:

$$\chi^2_{0.05,40}=\frac{1}{2}(Z_{0.05}+\sqrt{2(40)-1})^2=\frac{1}{2}(1.64+\sqrt{79})^2=55.42$$

که مقدار دقیق $\chi^2_{0.05,40}$ با استفاده از جدول کای‌دو برابر با ۵۵/۸ می‌باشد.

۳ـ اگر در توزیع $F$ درجه آزادی مخرج، بی‌نهایت باشد خواهیم داشت:

$$F_{k_1,\infty} = \frac{\chi^2_{k_1}/k_1}{1} = \frac{\chi^2_{k_1}}{k_1} \qquad (۱-۴۱)$$

اگر درجه آزادی صورت بی‌نهایت باشد، خواهیم داشت:

$$F_{\infty,k_2} = \frac{1}{\chi^2_{k_2}/k_2} = \frac{k_2}{\chi^2_{k_2}} = \frac{1}{F_{k_2,\infty}} \qquad (۱-۴۲)$$

۴- اگر در توزیع $F$، درجه آزادی صورت برابر با ۱ باشد، آنگاه توزیع $F$ با مجذور توزیع $t$ برابر است:

$$F_{1,k_2} = \frac{\chi^2_1/1}{\chi^2_{k_2}/k_2} = \frac{Z^2}{\chi^2_{k_2}/k_2} = t^2_{k_2} \qquad (۱-۴۳)$$

### ۸-۱ انواع داده‌ها

داده‌های مورد استفاده در مباحث اقتصادی و مالی را می‌توان به سه دسته کلی تقسیم نمود: سری‌های زمانی، داده‌های مقطعی و داده‌های پانل (ترکیبی).

داده‌های سری زمانی مربوط به یک دوره زمانی معین است که ممکن است سالانه، فصلی، ماهانه، هفتگی، روزانه و یا حتی ساعتی و کمتر باشد.

داده‌های مقطعی بیانگر اطلاعات مربوط به یک متغیر در یک زمان معین می‌باشد. مانند مصرف نان در گروههای درآمدی مختلف در سال ۱۳۸۰، بازده سهام شرکتهای مختلف در سال ۱۳۸۸، تغییرات قیمت سهام شرکتهای مختلف در ۱۳۸۸/۱۰/۲۰ و رشد اقتصادی کشورهای مختلف در سال ۲۰۱۰.

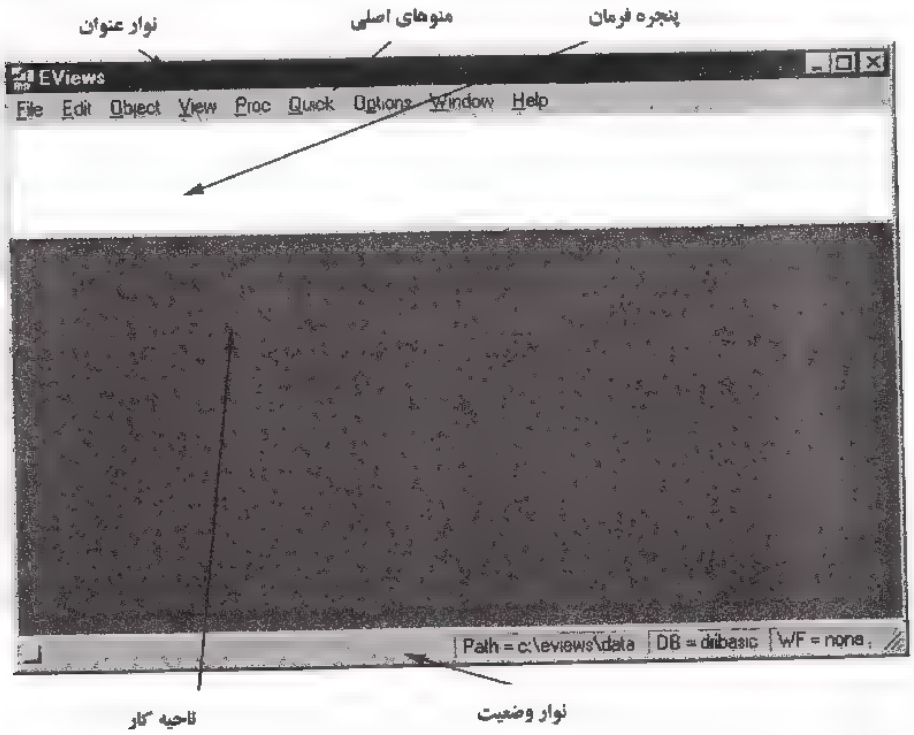
داده‌های ترکیبی یا پانل، ترکیبی از داده‌های سری زمانی و مقطعی است، یعنی هم مقطع و هم زمان را شامل می‌شود. مانند رشد اقتصادی کشورهای مختلف در دوره ۲۰۱۰-۱۹۸۰، قیمت سهام شرکتهای مختلف در دوره ۱۳۸۵-۱۳۸۰. اگر طول دوره را با $T$ و تعداد مقطع‌ها را با $n$ نشان دهیم، کل مشاهدات برابر با $nT$ خواهد بود.

## ۹-۱ آشنایی مقدماتی با نرم‌افزار Eviews

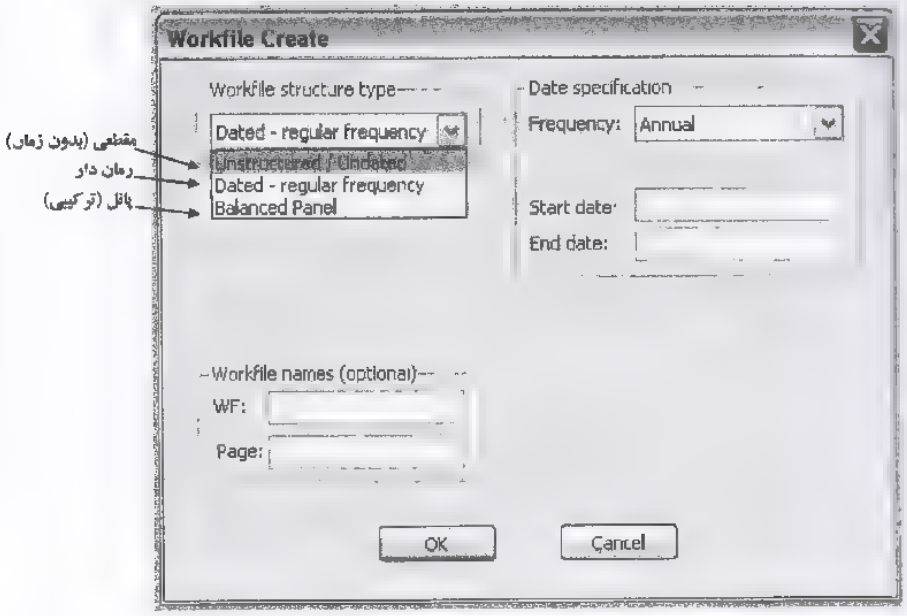
Eviews از جمله نرم‌افزارهایی است که کار با آن بسیار ساده است. در اینجا نکات اولیه جهت کار با Eviews7 را ارائه می‌کنیم. سایر نکات در فصول بعدی همراه با مباحث اقتصاد سنجی ارائه خواهد شد.

**ایجاد فایل کاری (Workfile)**

بعد از نصب Eviews و اجرای آن، پنجره Eviews باز می‌شود که به شکل زیر بوده و از این به بعد آن را پنجره اصلی می‌گوییم.



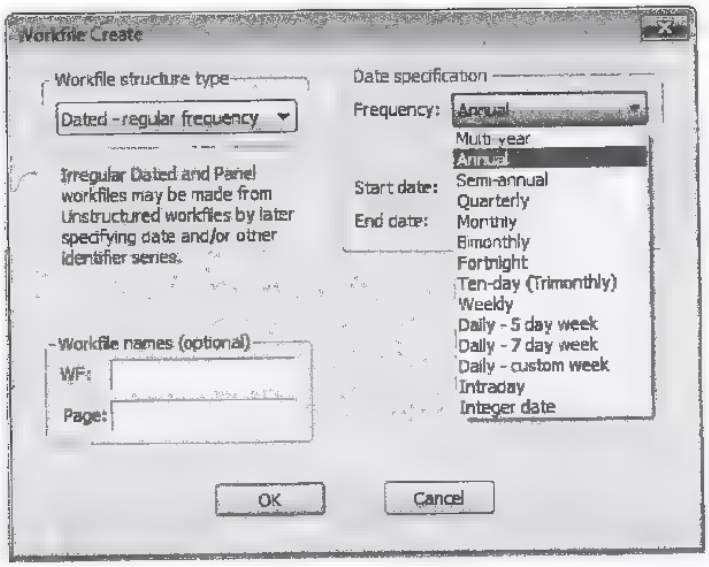

برای ایجاد فایل کاری، ابتدا در پنجره اصلی از طریق منوی File گزینه New را انتخاب می‌کنیم که به دنبال آن پنجره فایل کاری تحت عنوان Workfile Create باز می‌شود.




در سمت چپ این پنجره باید نوع داده‌ها را مشخص کنیم که آیا مقطعی (بدون زمان) یا سری زمانی (زمان‌دار) است و یا پانل (ترکیبی) می‌باشد. در مورد داده‌های ترکیبی در فصول بعدی بحث خواهیم کرد.

اگر داده‌ها به‌صورت مقطعی باشد، ابتدا گزینه Unstructured/Undated را انتخاب کرده و سپس تعداد مشاهدات را در قسمت Observations که در سمت راست نمایان می‌شود، وارد می‌کنیم.

اگر داده‌ها به‌صورت سری زمانی باشد، ابتدا گزینه Dated-regular frequency را انتخاب کرده و سپس در سمت راست، بر حسب نوع داده‌ها یکی از موارد سالانه، فصلی، ماهانه، هفتگی و روزانه و ... را انتخاب می‌کنیم.




برخی از این موارد به‌صورت زیر می‌باشد:

**داده‌های سالانه:** در سمت راست، گزینه Annual را انتخاب می‌کنیم. اگر سال شروع ۱۳۵۰ و سال پایان ۱۳۸۰ باشد، زمان شروع و پایان را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم:

| Start date | End date |
|---|---|
| 1350 | 1380 |

**داده‌های فصلی:** در سمت راست، گزینه Quarterly را انتخاب می‌کنیم. اگر زمان شروع، تابستان ۱۳۵۰ و زمان پایان، بهار ۱۳۹۰ باشد، آن را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم:

| Start date | End date |
|---|---|
| 1350:2 | 1390:1 |

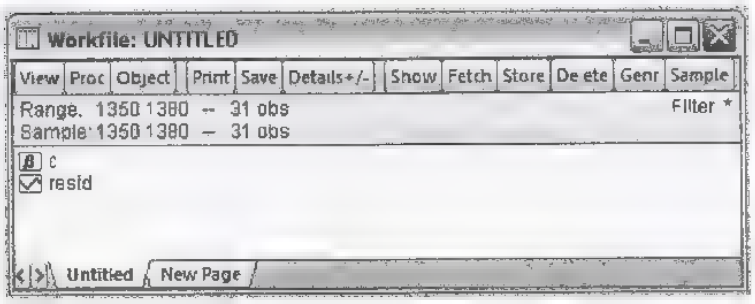
**داده‌های ماهانه:** در سمت راست، گزینه Monthly را انتخاب می‌کنیم. اگر زمان شروع، بهمن ۱۳۵۰ و زمان پایان، خرداد ۱۳۹۰ باشد، آن را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم:

| Start date | End date |
|---|---|
| 1350:11 | 1390:3 |

**داده‌های هفتگی:** در سمت راست گزینه Weekly را انتخاب می‌کنیم. در اینجا ابتدا هفته و سپس سال را وارد می‌کنیم. برای وارد نمودن شماره هفته، تاریخ شروع آن در ماه مورد نظر را وارد می‌کنیم (سال: روز: ماه). به‌عنوان مثال 11:5:1380 بیانگر هفته‌ای است که شروع آن پنجم بهمن ۱۳۸۰ می‌باشد.

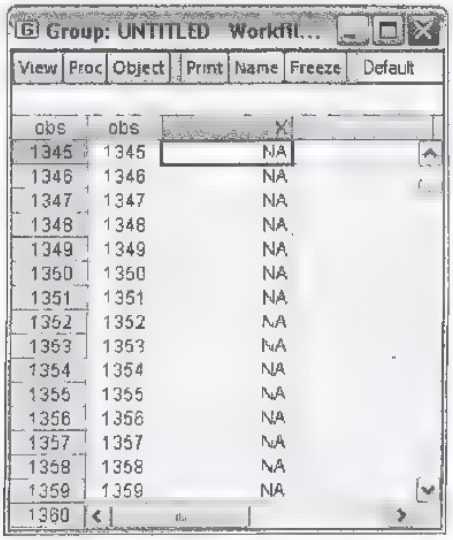
**داده‌های روزانه:** برای داده‌های روزانه، ابتدا یکی از گزینه‌های Daily(5 Day Weeks) یا Daily (7 Day Weeks) را انتخاب کرده و سپس به ترتیب ماه، روز و سال مورد نظر را وارد می‌کنیم (سال: روز: ماه).

بعد از مشخص نمودن نوع داده‌ها وانتخاب OK، پنجره دیگری به نام فایل کاری (Workfile) باز می‌شود. در این پنجره، حرف c بیانگر پارامترهای مدل تخمینی است و عبارت resid بیانگر باقیمانده‌ها یا خطاهای مدل تخمینی است که در تخمین معادلات مورد استفاده بوده و بعداً راجع به آن بحث خواهیم کرد.




**ورود داده‌ها**

برای ورود داده‌ها می‌توان مستقیماً هر متغیری را ایجاد کرده و داده‌های آن را به‌صورت دستی وارد نمود. به‌عنوان مثال برای ورود داده‌های X ابتدا در پنجره فرمان، عبارت data x را نوشته و با زدن کلید Enter پنجره زیر را باز می‌کنیم.




در این پنجره در مقابل هر سال داده‌های آن سال را وارد و در پایان، با بستن این پنجره، نام متغیر مورد نظر (x) در فایل کاری نمایان می‌شود. همچنین برای ورود داده‌ها می‌توان آنها را از نرم‌افزارهای دیگری مانند Excel وارد Eviews نمود.

**ایجاد متغیرهای جدید**

با فرمان genr می‌توان هر متغیر جدیدی را بر اساس متغیرهای موجود، ایجاد نمود. مثلاً اگر z برابر با $x^2$ باشد می‌توان در سطر فرمان از فرمان genr z=x^2 استفاده نمود. سایر متغیرها را به‌عنوان نمونه می‌توان به‌صورت زیر ایجاد نمود:

جمع u=x+y

تقسیم u=x/5 , u=x/y

لگاریتم u=log(x)

نمایی u=exp(x)

**وقفه‌ها و تفاضل‌ها**

اگر متغیر $x_t$ بیانگر مقدار x در سال t باشد، در نرم‌افزار Eviews با x نشان داده می‌شود. ولی برای $x_{t-1}$ که مقدار x را در سال در سال t-1 (سال گذشته) و یا مقدار x را با یک وقفه بیان می‌کند،

در Eviews با x(-1) نشان داده می‌شود. همچنین برای دو وقفه (دو سال قبل) از x(-2) استفاده می‌شود. علاوه براین، برای سال‌های بعد از t مانند t+1 و t+2 از x(1) و x(2) استفاده می‌شود.

طبق تعاریف فوق برای محاسبه تفاضل مرتبه اول (تغییرات مرتبه اول) از x-x(-1) استفاده می‌شود. اگر تفاضل مرتبه اول x را با dx نشان دهیم، در این صورت از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

genr dx=x-x(-1) یا genr dx=d(x)

همچنین برای محاسبه نرخ رشد x ، یعنی gx، از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

genr gx=(x-x(-1))/x(-1)=d(x)/x(-1)

**تغییر نام متغیرها**

برای تغییر نام متغیرها از فرمان «تغییر نام» استفاده کنیم که علامت اختصاری آن r می‌باشد. مثلاً برای تغییر نام x به y به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

r x y

**متغیر زمان**

در مواردی نیاز به «متغیر روند» داریم. به‌عنوان مثال اگر داده‌های ما از سال ۱۳۵۱ تا ۱۳۹۰ باشد، متغیر روند که با t نشان می‌دهیم از ۱ برای سال ۱۳۵۱ شروع شده و تا ۴۰ برای سال ۱۳۹۰ ادامه می‌یابد. مانند هر متغیر معمولی، اگر مقادیر متغیر روند را با t نشان دهیم، آن را با فرمان « data t» ایجاد می‌کنیم. اما در Eviews می‌توان عبارت @trend را برای متغیر روند استفاده نمود.

**اصلاح داده‌های وارد شده**

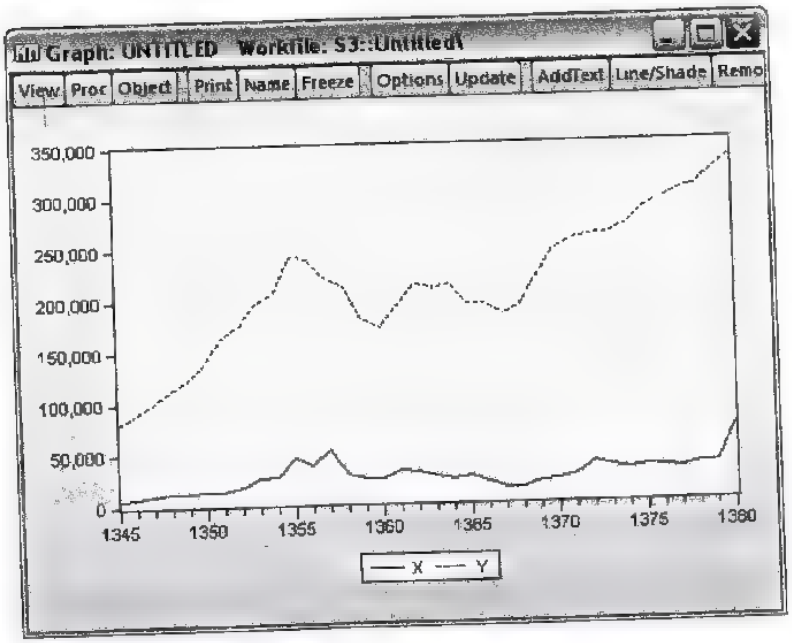
همان طور که قبلاً دیدم برای وارد نمودن داده‌های متغیر x از فرمان «data x» استفاده می‌کنیم. حال اگر در وارد نمودن داده‌ها، اشتباهی رخ داده باشد مجدداً فرمان «data x» را اجرا کرده و اصلاحات مورد نظر را انجام می‌دهیم.

**مشاهدهٔ داده‌های واردشده**

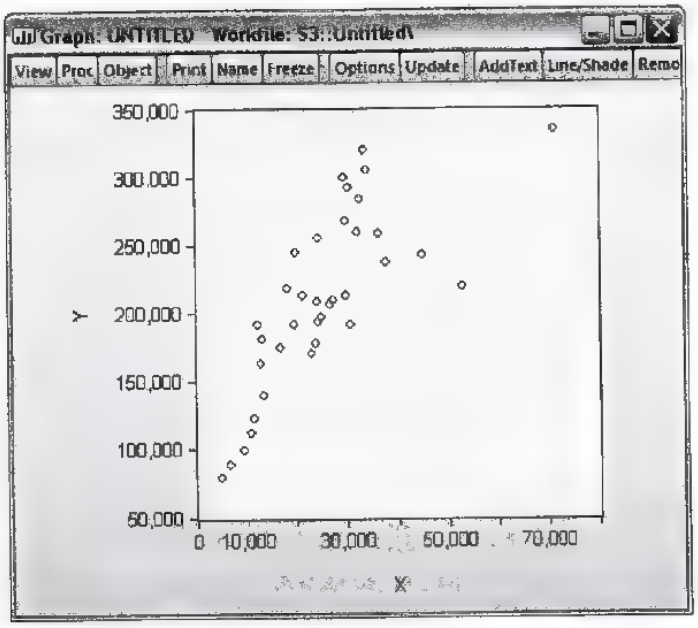
برای مشاهده داده‌های وارد شده از فرمان show استفاده می‌شود. مثلاً برای مشاهده مقادیر x و y از فرمان «show x y» استفاده می‌کنیم.

**نمودارها**

در Eviews امکان ترسیم نمودارهای مختلف وجود دارد. مثلاً برای ترسیم داده‌های سری زمانی از فرمان plot استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال برای ترسیم داده‌های x از فرمان «plot x» و برای ترسیم همزمان داده‌های x و y از فرمان «plot x y» استفاده می‌کنیم.




در بسیاری از موارد نیاز به ترسیم داده‌های یک متغیر در مقابل دیگری داریم. در این صورت می‌توان از فرمان scat استفاده نمود. برای رسم داده‌های y در مقابل x (y روی محور عمودی و x روی محور افقی) از فرمان «scat x y» استفاده می‌کنیم. با اجرای این فرمان، نمودار پراکندگی ترسیم می‌گردد.




**تغییر دوره زمانی**

در بالای فایل کاری، عبارت دامنه(Range) و نمونه (Sample) را ملاحظه می‌کنیم. به‌عنوان مثال اگر داده‌های ما شامل دوره ۱۳۵۰ تا ۱۳۸۰ باشد، در این صورت دامنه و نمونه شامل دوره ۱۳۵۰ تا ۱۳۸۰ می‌باشد. اگر بخواهیم دامنه را تا سال ۱۳۹۰ گسترش دهیم در سطر فرمان از فرمان «range 1350 1390» استفاده می‌کنیم. معمولاً نیاز کمتری به تغییر دامنه پیدا می‌کنیم. موارد استفاده از تغییر نمونه بسیار زیاد است. به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم فقط با داده‌های دوره ۱۳۵۰ تا ۱۳۷۰ کار کنیم در صورت دوره نمونه را با فرمان «smpl 1350 1370» تغییر می‌دهیم. این فرمان را می‌توان برای هر دوره دیگری نیز به‌کار برد. به‌عنوان نمونه اگر بخواهیم نمونه ما شامل سال ۱۳۵۷ نباشد از فرمان «smpl 1350 1356 1358 1380» استفاده می‌کنیم.

## مسائل

۱- یک فایل کاری در Eviews بسازید و داده‌های زیر را وارد کنید.

| سال | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| ۱۳۵۱ | ۱ | ۵۰ | -۱۰ |
| ۱۳۵۲ | ۱ | ۴۸ | -۸ |
| ۱۳۵۳ | ۲ | ۴۶ | -۹ |
| ۱۳۵۴ | ۲ | ۵۰ | ۶ |
| ۱۳۵۵ | ۳ | ۴۲ | -۵ |
| ۱۳۵۶ | ۳ | ۴۴ | ۵ |
| ۱۳۵۷ | ۴ | ۴۰ | -۸ |
| ۱۳۵۸ | ۶ | ۴۰ | ۲ |
| ۱۳۵۹ | ۵ | ۳۸ | ۱ |
| ۱۳۶۰ | ۸ | ۳۶ | ۱ |
| ۱۳۶۱ | ۱۰ | ۳۵ | ۲ |
| ۱۳۶۲ | ۱۰ | ۳۵ | ۴ |
| ۱۳۶۳ | ۱۲ | ۳۰ | ۴ |
| ۱۳۶۴ | ۱۴ | ۲۸ | ۵ |
| ۱۳۶۵ | ۱۳ | ۲۶ | ۶ |
| ۱۳۶۶ | ۱۶ | ۲۵ | ۶ |
| ۱۳۶۷ | ۱۸ | ۲۵ | ۷ |
| ۱۳۶۸ | ۱۸ | ۲۴ | ۸ |
| ۱۳۷۰ | ۲۰ | ۲۲ | ۹ |
| ۱۳۷۱ | ۲۰ | ۲۰ | ۱۰ |
| ۱۳۷۲ | ۲۲ | ۲۲ | ۱۰ |
| ۱۳۷۳ | ۲۳ | ۱۸ | ۱۲ |
| ۱۳۷۴ | ۲۲ | ۱۸ | ۱۰ |
| ۱۳۷۵ | ۲۵ | ۱۶ | ۱۵ |
| ۱۳۷۶ | ۲۷ | ۱۶ | ۱۵ |
| ۱۳۷۷ | ۳۰ | ۱۴ | ۱۸ |
| ۱۳۷۸ | ۳۰ | ۱۲ | ۲۰ |
| ۱۳۷۹ | ۳۳ | ۱۲ | ۲۰ |
| ۱۳۸۰ | ۳۳ | ۱۰ | ۲۲ |

۲- در مسئله ۱، نمودار سری‌های زمانی را برای $X$، $Y$ و $Z$ ترسیم کنید.

۳- در مسئله ۱، $Y$ را در مقابل $Z$ رسم کنید.

۴- در مسئله ۱، تغییرات $Y$ و $Z$ را حساب کرده و سپس تغییرات $Y$ را در مقابل تغییرات $Z$ رسم کنید. چه تفاوتی با نمودار مسئلهٔ ۳ مشاهده می‌کنید.

۵- در مسئله ۱ نرخ رشد $X$، $Y$ و $Z$ را حساب کنید و نمودار آنها را ترسیم کنید.

۶- اگر $X$ توزیع نرمال با تابع چگالی $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ داشته باشد، ضرایب $\mu$ و $\sigma^2$ را با روش گشتاورها برآورد کنید.

۷- $X$ توزیع هندسی با تابع احتمال $P(x)=p(1-p)^{x-1}$ دارد. ضریب $p$ را با روش گشتاورها برآورد کنید.

۸- $X$ توزیع نرمال با تابع چگالی $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ دارد. ضرایب $\mu$ و $\sigma^2$ را با روش حداکثر درستنمایی برآورد کنید.

۹- $X$ توزیع هندسی با تابع احتمال $P(x)=p(1-p)^{x-1}$ دارد. ضریب $p$ را با روش حداکثر درستنمایی برآورد کنید.

۱۰- در مسئله ۳، خاصیت بدون تورش بودن تخمین‌زننده‌های حداکثر درستنمایی را بررسی کنید.

۱۱- در مسئله ۳، آیا تخمین‌زننده حداکثر درستنمایی، حد پایین نامساوی رائو-کرامر را تأمین می‌کند.

۱۲- در مسئله ۳، تخمین‌زنندهٔ $\sigma^2$ که به‌صورت $\frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n}$ به‌دست می‌آید، آیا در مقایسه با تخمین‌زننده بدون تورش $S^2=\frac{\Sigma(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ کارایی بیشتر دارد.

۱۳- در مسئله ۴، آیا تخمین‌زننده $p$ حد پایین نامساوی رائو-کرامر را تأمین می کند.

۱۴- خاصیت سازگاری را برای تخمین‌زننده‌های $\mu$ و $\sigma^2$ در مسئله ۸ بررسی کنید.

۱۵- خاصیت سازگاری را برای تخمین‌زننده $p$ در مسئله ۹ بررسی کنید.

۱۶- اگر $u_i$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2$ داشته باشد، ثابت کنید که $\frac{\mathbf{u'u}}{\sigma^2}$ توزیع کای‌دو دارد که $\mathbf{u}'=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ است.

۱۷- در مسئله ۱۶ ثابت کنید که نسبت $\sqrt{n-1}\frac{\bar{u}}{\sqrt{\mathbf{u'u}}}$ توزیع $t$ با درجه آزادی $n-1$ دارد ($\bar{u}$ میانگین $u_i$ است).

۱۸- ثابت کنید که $F_{1,n}=t_n^2$ است.

۱۹- $X$ توزیع نمایی به‌صورت $f(x)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}$ دارد.

الف) با استفاده از روش گشتاورها، تخمین‌زنندهٔ $\beta$ را به‌دست آورید.

ب) ثابت کنید که تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برای $\beta$ برابر با $\bar{X}$ است.

ج) آیا تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی، شرایط بدون تورش، سازگاری، حد پایین نامساوی رائو-کرامر و کفایت را تأمین می‌کند.

## ضمیمه فصل ۱: مروری بر نرم‌افزار Stata

### معرفی بخش‌های اولیه Stata

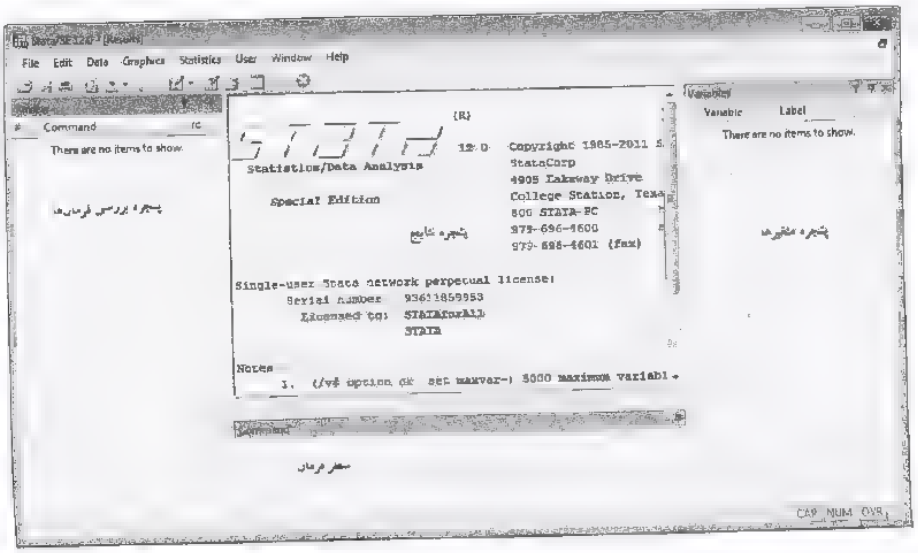
بعداز اجرای نرم‌افزار Stata، ابتدا پنجره زیر را مشاهده خواهید کرد که دارای چهار قسمت است:

۱- سطر فرمان که می‌توان فرمان‌های مختلف را در آن تایپ کرد.

۲- پنجره بررسی فرمان‌های قبلی است که فرمان‌های قبلی را نشان می‌دهد.

۳- پنجره متغیرها که نام متغیرهای موجود در فایل داده‌ها را نشان می‌دهد.

۴- پنجره نتایج که نتایج حاصل از اجرای فرمان‌ها را نشان می‌دهد.




نوار بالای پنجره فوق، منوهای اصلی را نشان می‌دهد که هر یک از آنها کارکردهای خاص خود را دارد که در قسمت‌های بعدی به آنها اشاره خواهیم کرد.

### ایجاد فایل کاری و ورود داده‌ها

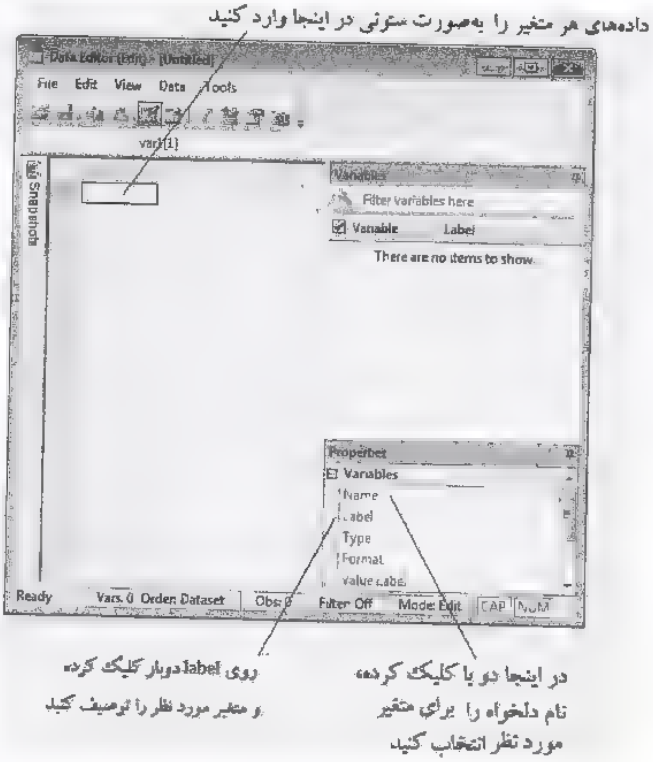
ابتدا بایستی یک فایل کاری برای وارد نمودن داده‌ها ایجاد نماییم. بدین منظور مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

Data → Data editor

پنجره data editor برای ورود داده‌ها باز می‌شود. در این پنجره، هر ستون برای یک متغیر می‌باشد. با کلیک روی سطر اول هر ستون می‌توانید داده‌های متغیر مورد نظر را وارد کنید. داده‌ها را می‌توان به‌صورت دستی یا از برنامه‌های دیگر مانند excel یا eviews و ... کپی نمود.

در این پنجره، delete برای حذف متغیر، hide برای پنهان کردن نام متغیر، restore برای ذخیره تغییرات انجام شده می‌باشد.

در اینجا لازم است متغیر زمان را تعریف کنیم که برای سری‌های زمانی بیانگر زمان یا دورهٔ نمونه است.




علاوه بر شیوه فوق، می‌توان برای تغییر نام متغیره از فرمان زیر استفاده نمود:

rename var1 y  یا  ren var1 y

اجرای فرمان فوق، نام متغیر var1 را به y تغییر می‌دهد.

## مشاهده و اصلاح داده‌های وارد شده

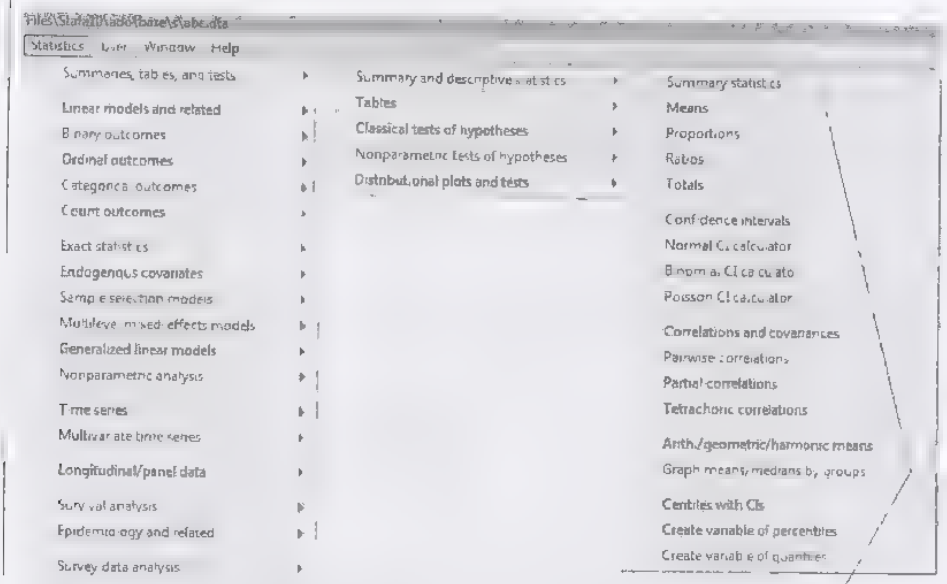
برای مشاهده داده‌های وارد شده می‌توان از مشابه وارد نودن داده‌های جدید، عمل نمود و از طریق Data Editor داده‌ها را مشاهده و اصلاح نمود.

همچنین می‌توان برای مشاهده داده‌ها از فرمان زیر استفاده نمود:

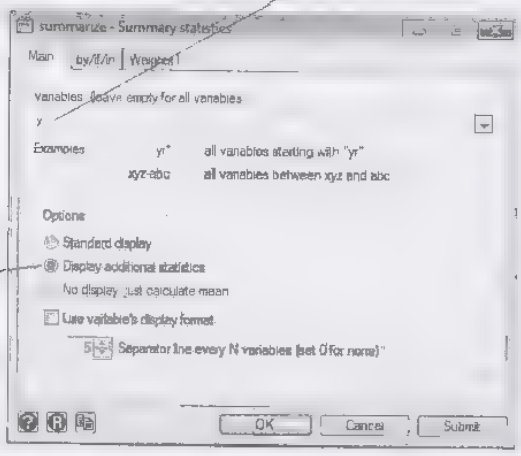
```
list y x z
```

## توصیف کلی داده‌های یک متغیر

برای هر متغیر می‌توان شاخص‌های مختلفی از قبیل میانگین، واریانس و غیره را محاسبه نمود. بدین منظور به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

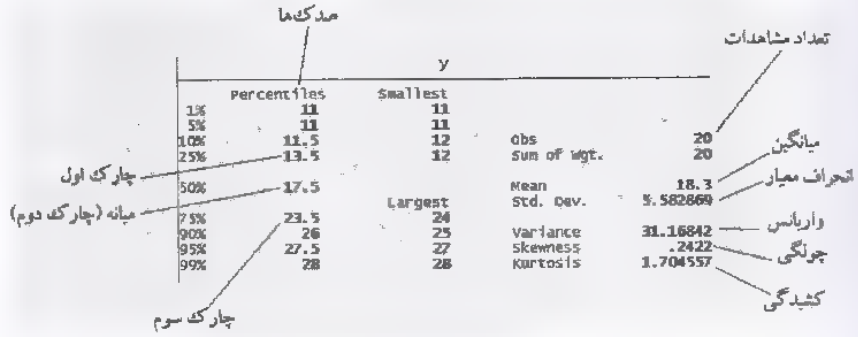



پنجره زیر باز می‌شود که نام متغیر مورد نظر را در اینجا وارد می‌کنیم




برای گرفتن جزئیات بیشتر

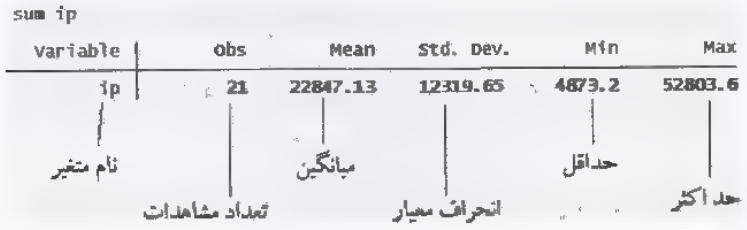
مشخصات متغیر y به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:




نتایج فوق را می‌توان با فرمان سادهٔ sum y, detail نیز به‌دست آورد. علاوه بر این، اگر یکی از فرمان‌های زیر را اجرا کنیم، خلاصه‌ای از وضعیت متغیر مورد نظر ارائه می‌شود:

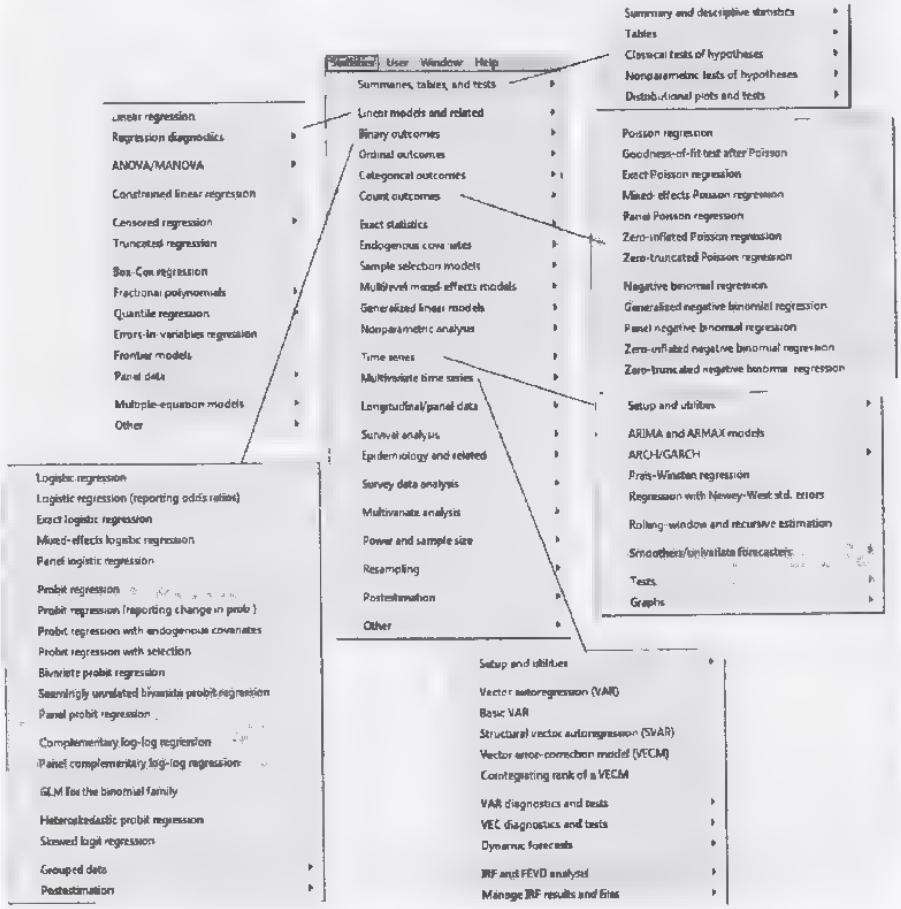
Summarize ip یا summ ip یا sum ip

که نتایج به‌صورت زیر نشان داده شده می‌شود:




## منوی Statistics

محاسبات آماری و روش‌های مربوطه، معمولاً در گزینه‌های این منو قرار دارد. هر یک از قسمت‌های این منو، جزئیات زیادی دارد که در قسمت‌های بعدی، به آنها اشاره خواهیم کرد. برخی از کارکردهای آن در نمودار زیر نشان داده شده است.




## ایجاد متغیر جدید

با استفاده از متغیرهای موجود می‌توان متغیرهای جدیدی را تعریف نمود. بدین منظور از فرمان gen استفاده می‌شود:

```
gen u=y+10
gen v=x+y
gen w=x^2
gen ly=log(y)
gen q=x if x>8
```

آخری، متغیر q را برابر با x قرار می‌دهد ولی به‌ازای مقادیر بزرگتر از هشت. توجه شود که در این حالت، مقدار q در مواردی که x کوچکتر از ۱۰ است، موجود نمی‌باشد. همچنین فرمان‌های دیگری برای سایر محاسبات وجود دارد که به‌عنوان مثال برای محاسبه لگاریتم از فرمان زیر استفاده می‌شود:

```
gen y=log(x)
```

## متغیر زمان

متغیر زمان برای داده‌های سالانه: از سال ۱۳۵۰ تا ... با فرمان زیر حساب می‌شود:

```
gen t=1350+_n-1
```

متغیر زمان برای داده‌های فصلی (۳ ماهه): دو فرمان زیر را به‌دنبال هم اجرا می‌کنیم:

```
gen t=tq(1350q1)+_n-1
format t %tq
```

متغیر زمان برای داده‌های ماهانه: دو فرمان زیر را به‌دنبال هم اجرا می‌کنیم:

```
gen t=tm(1350m1)+_n-1
format t %tm
```

متغیر زمان برای داده‌های هفتگی: دو فرمان زیر را به‌دنبال هم اجرا می‌کنیم:

```
gen t=tw(1350w1)+_n-1
format t %tw
```

متغیر زمان برای داده‌های روزانه: دو فرمان زیر را به‌دنبال هم اجرا می‌کنیم:

```
gen t=td(23dec1985)+_n-1
format t %td
```

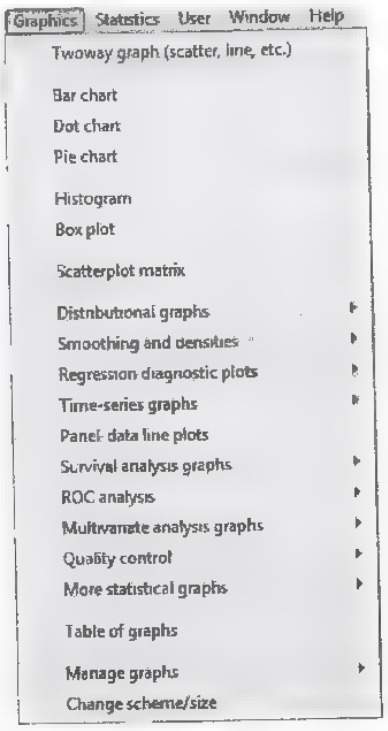
بعد از ایجاد متغیر زمان، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم تا متغیر t به‌عنوان زمان در نظر گرفته شود:

```
tsset t
```

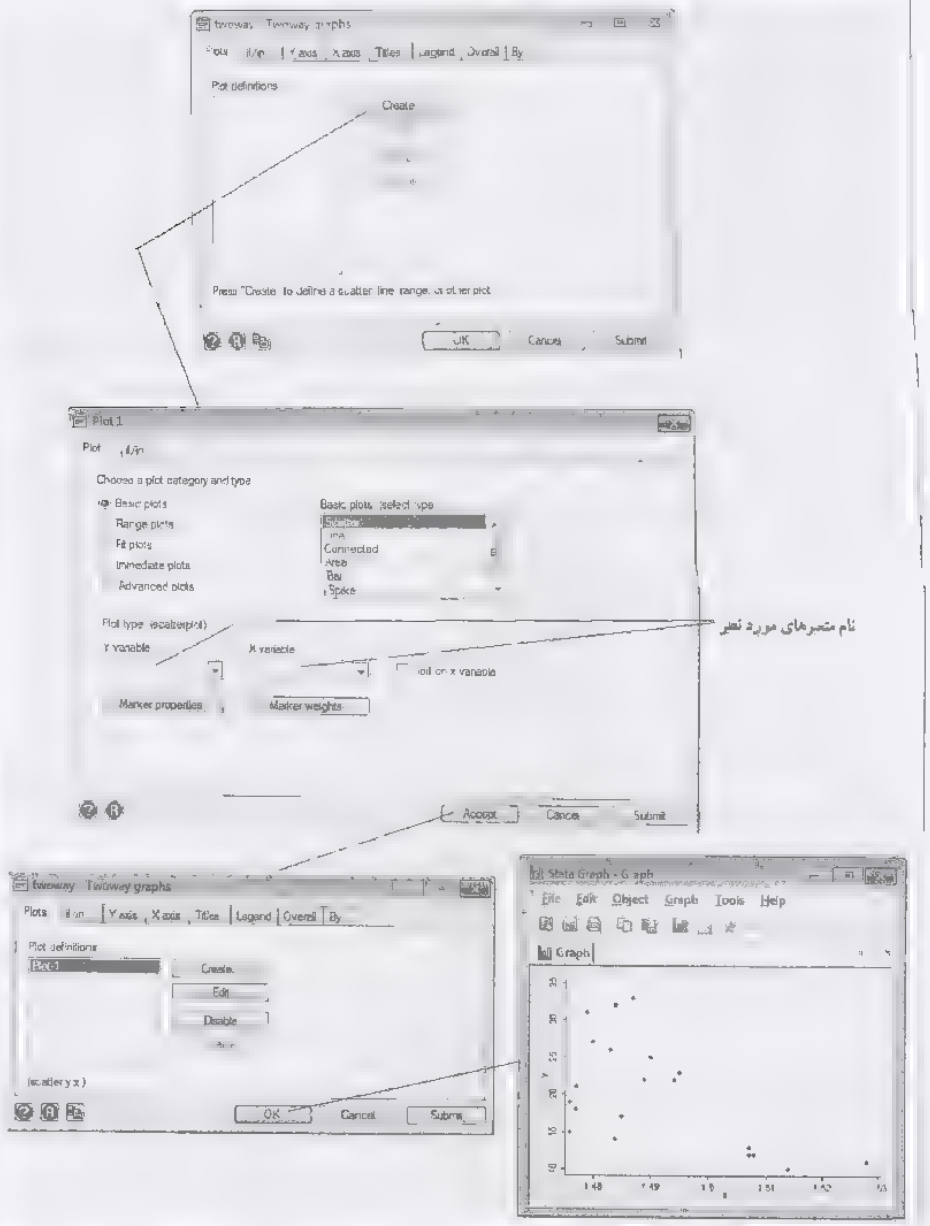
تا هنگامی که هر یک از این فرمان‌ها را اجرا نکنید، stata متغیر زمان را نمی‌شناسد.

## نمودارها

برای رسم نمودارها از منوی Graphics استفاده می‌شود که گزینه‌های مختلفی برای ترسیم نمودار به شرح زیر دارد:



اولین گزینه تحت عنوان twoway graph(scater, line, etc) است که بیش از بقیه مورد استفاده می‌باشد. با انتخاب این گزینه، پنجره زیر باز می‌شود:



و یا می‌توان از فرمان‌های کوتاه مانند scatter y x در سطر فرمان استفاده نمود.

همچنین می‌توان نمودار y در مقابل x را بافرمان زیر ترسیم نمود.

```
twoway (scatter y x)
```

برای رسم نمودارهای سری زمانی از فرمان زیر استفاده می‌شود:

```
twoway (line y x t)
```

line نوع نمودار، x و y نام متغیرها، و t مقادیر روی محور x است که می‌تواند زمان یا هر چیز دیگری باشد.

علاوه بر این می‌توان از فرمان زیر برای رسم نمودارهای معمولی مانند سری زمانی استفاده نمود:

```
tsline y x
```

## سایر فرمان‌ها

| | |
|---|---|
| وقفه مرتبه یک (مقدار y در زمان t-۱) | l.y یا l1.y |
| وقفه مرتبه دو (مقدار y در زمان t-۲) | l2.y |
| مقدار y در زمان t+۱ | f.y یا f1.y |
| مقدار y در زمان t+۲ | f2.y |
| تفاضل مرتبه اول $(y_t-y_{t-1})$ | d.y یا d1.y |
| تفاضل مرتبه اول $(y_t-y_{t-1})-(y_{t-1}-y_{t-2})$ | d2.y |
| تفاضل‌های فصلی $(y_t-y_{t-s})$ | ds.y |
| $(y_t-y_{t-2s})$ | d2s.y |

s=4 برای فصل (سه ماهه) و s=12 برای ماهانه

همچنین برای محاسبهٔ مقادیر تأخیری (وقفه) می‌توان از فرمان زیر استفاده نمود:

```
gen y1=y[_n-1]
```

## افزودن دامنه

گاهی اوقات برای اضافه کردن داده‌ها و یا برای پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای، لازم است که دامنه مورد نظر را گسترش دهیم. بدین منظور می‌توان فرمان زیر را اجرا نمود:

```
tsappend, add(10)
```

فرمان فوق، دامنه موردنظر را ۱۰ تا افزایش می‌دهد که می‌تواند سال، ماه و غیره باشد. مثلاً دامنه را که قبلاً تا سال ۱۳۸۰ بوده تا سال

۱۳۹۰ اضافه می‌کند. علاوه بر این می‌توان از فرمان زیر استفاده نمود.

```
tsappend, last (1380) tsfmt(ty)
```

برای داده‌های فصلی، آخرین فصل (1380q4) را مشخص کرده و به‌جای ty از tq استفاده می‌کنیم. همین فرمان را برای داده‌های ماهانه نیز می‌توان استفاده نمود که در این حالت آخرین زمان مثلاً 1380m12 را معلوم کرده و به‌جای ty از tm استفاده می‌کنیم.

## سایر علائم

مساوی ==

مساوی نیست با - !

بزرگتر از >

کوچکتر از <

بزرگتر یا مساوی =>

کوچکتر یا مساوی =<

و &

یا |

## لحاظ نکردن برخی از مشاهدات

اگر بخواهیم در تخمین معادلات و یا در سایر محاسبات، شرطی را قائل شویم می‌توان آن را با if لحاظ نمود. به عنوان مثال می‌خواهیم آن بخش از مشاهدات که y برابر صفر است، در نظر گرفته نشوند. بدین منظور از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

```
Drop if y==0
```

این فرمان موجب حذف آن بخش از مشاهدات می‌شود که y=۰ است. همچنین می‌توان به جای صفر هر عدد دیگری را نیز درنظر گرفت. به جای مساوی می‌توان از کوچکتر و بزرگتر نیز استفاده نمود.

## حذف یک متغیر

متغیر y را می‌توان با فرمان زیر حذف نمود:

```
drope y
```

همچنین اجرای فرمان زیر، همه متغیرهای یک فایل بجز متغیرهای x و y و z را حذف می‌کند:

```
keep x y z
```

### نشان‌گذاری متغیرها

متغیرها که با حروف لاتین نشان داده می‌شوند نیاز به توصیف بیشتری دارند. در این خصوص می‌توان با استفاده از فرمان زیر، یک برچسب را برای متغیر مورد نظر انتخاب نمود. به‌عنوان مثال می‌خواهیم نشان دهیم که y بیانگر رشد GDP است:

```
label  variable y "growth of GDP"
```

با اجرای این فرمان، عبارت growth of GDP مقابل متغیر y ظاهر می‌شود.

فصل دوم

# رگرسیون ساده

## ۲-۱ مقدمه

در تحلیل رگرسیون ساده، تبیین رابطهٔ بین دو متغیر بررسی می‌شود. بر خلاف همبستگی، در اینجا میزان تأثیر یک متغیر بر دیگری اندازه‌گیری می‌شود. به‌عنوان مثال رابطه بین تورم و رشد نقدینگی را می‌توان از طریق محاسبه ضریب همبستگی و یا از طریق رگرسیون بررسی نمود. ضریب همبستگی به بررسی وجود یا عدم وجود رابطه خطی می‌پردازد، اما در تحلیل رگرسیون، یک متغیر (مانند تورم) را تابعی از متغیر دیگر (مانند رشد نقدینگی) در نظر می‌گیریم. بررسی این موارد نیاز به روش‌هایی دارد که اصول آنها در این فصل بررسی می‌شود. بدین منظور در این فصل، ابتدا به مبانی نظری رگرسیون و سپس به روش‌های کاربردی آن خواهیم پرداخت. مبنای تحلیل رگرسیون عمدتاً بر توزیع‌های چند متغیره و توزیع‌های شرطی است که معادله رگرسیون را به‌صورت میانگین شرطی ارائه می‌کند. بدین منظور بحث را با امید ریاضی شرطی شروع می‌کنیم.

## ۲-۲ امید ریاضی شرطی و رگرسیون

در تحلیل رگرسیون معمولاً یکی از متغیرها را وابسته و دیگری را مستقل فرض می‌کنیم. در ابتدا باید توجه داشت که در تابع $Y = f(X)$ به ازای $X$، یک مقدار معین برای $Y$ وجود دارد. به‌عبارت دیگر به ازای $X = a$ همواره $Y = f(a)$ خواهد بود. اما در تحلیل رگرسیون به ازای $X = a$، الزاماً همواره $Y = f(a)$ به‌دست نمی‌آید. یعنی اگر $X$ را در سطح $a$ کنترل کنیم،

الزاماً مقدار $Y = f(a)$ به‌دست نمی‌آید، زیرا عوامل دیگری(به‌جز $X$) وجود دارند که بر $Y$ اثر می‌گذارند. در واقع این بحث بیانگر تفاوت شرایط مطمئن با شرایط نامطمئن می‌باشد. به همین دلیل، وقتی به ازای هر $X$ چندین $Y$ وجود دارد، بایستی از متوسط‌های $Y$ استفاده نمود که معروف به میانگین‌های شرطی یا امید ریاضی شرطی می‌باشد. بنابراین ابتدا لازم است مفهوم امید ریاضی شرطی را بررسی کنیم.

بدین منظور، بحث را با تابع احتمال مشترک پی‌گیری می‌کنیم. فرض کنید تابع احتمال (چگالی) مشترک $X$ و $Y$ به‌صورت زیر باشد:

$$f(x,y) = \frac{۲}{۳}(x+۲y) \qquad ۰<x<۱ \quad , ۰<y<۱$$

توزیع‌های حاشیه‌ای یا توزیع تکی هر یک از متغیرها و همچنین توزیع شرطی $Y$ عبارت است از:

$$f(x) = \int_۰^۱ f(x,y)dy = \int_۰^۱ \frac{۲}{۳} f(x+۲y)dy = \frac{۲}{۳}(۱+x)$$

$$f(y) = \int_۰^۱ f(x,y)dx = \int_۰^۱ \frac{۲}{۳}(x+۲y)dx = \frac{۱}{۳}(۱+۴y)$$

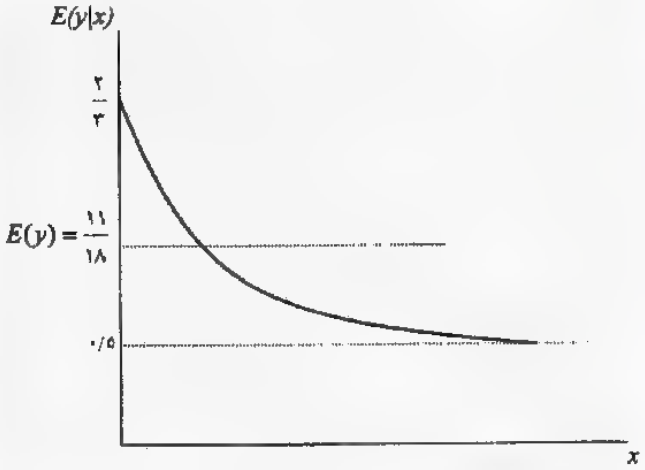
$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{\frac{۲}{۳}(x+۲y)}{\frac{۲}{۳}(x+۱)} = \frac{x+۲y}{x+۱}$$

$f(x)$ و $f(y)$ به ترتیب تابع احتمال $X$ و $Y$ بوده و $f(y|x)$ نیز تابع احتمال شرطی $Y$ می‌باشد. با استفاده از تابع احتمال شرطی می‌توان رابطهٔ بین دو متغیر $X$ و $Y$ را بررسی نمود. اگر شرط $f(y|x)=f(y)$ برقرار باشد، در این صورت این دو متغیر، مستقل‌اند و هیچ رابطه‌ای با هم ندارند. اما در غیر این صورت متغیرهای مذکور، مستقل نیستند. در مثال فوق، چون $f(y|x)\neq f(y)$ است لذا $X$ و $Y$ مستقل نیستند.

اما سؤال این است که چگونه رابطه بین $X$ و $Y$ را به‌صورت کمّی بررسی کنیم. یکی از راههای مناسب این است که امید ریاضی شرطی $Y$ را حساب کنیم. بدیهی است که اگر $Y$ مستقل از $X$ باشد در این صورت $f(y|x)=f(y)$ و $E(Y|X)=E(Y)$ می‌باشد و در نتیجه امید ریاضی شرطی $Y$ تابعی از $X$ نخواهد بود. در مثال فوق امید ریاضی شرطی $Y$ عبارت است از:

$$E(Y|X)=\int_{0}^{1} yf(y|x)dy=\int_{0}^{1} y\frac{x+2y}{x+1}dy=\frac{3x+4}{6(x+1)}$$

بنابراین همان‌طور که انتظار می‌رفت، امید ریاضی شرطی $Y$ تابعی از $X$ است.




نمودار ۱-۲: امید ریاضی شرطی

پس به‌طورکلی اگر دو متغیر $X$ و $Y$ مستقل نباشند، امید ریاضی شرطی $Y$ تابعی از $X$ خواهد بود:

$$E(Y|X)=g(X) \qquad (۲-۱)$$

معادله (۱-۲) موسوم به معادلهٔ رگرسیون $Y$ روی $X$ می‌باشد. این تابع فقط رابطه بین میانگین‌های شرطی $Y$ با متغیر $X$ بوده که ممکن است خطی یا غیرخطی باشد. اگر خطی باشد، می‌توان آن را در حالت کلی به‌صورت زیر نوشت:

$$E(YX)=\alpha+\beta X \qquad (۲-۲)$$

در کاربردهای تجربی، معمولاً از معادلهٔ خطی استفاده می‌شود و یا اگر معادله‌ای غیرخطی باشد، می‌توان آن را با تقریب، تبدیل به خطی نمود.

**رگرسیون نرمال**

اگر تابع احتمال مشترک $X$ و $Y$، نرمال باشد، آنگاه امید ریاضی شرطی $Y$ تابع خطی از $X$ خواهد بود. تابع احتمال مشترک نرمال عبارت است از:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

تابع احتمال شرطی $Y$ نیز عبارت است از:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{\left[y-\left(\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x)\right)\right]^2}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}}$$

$X$ و $Y$ مستقل نیستند، زیرا $f(x,y)\neq f(x)f(y)$ و $f(y|x)\neq f(y)$ می‌باشد.

در اینجا $\rho$ ضریبی است که وابستگی $X$ و $Y$ را بیان می‌کند. اگر $\rho=0$ باشد، آنگاه $f(x,y)=f(x)f(y)$ و $f(y|x)=f(y)$ خواهد شد که بیانگر استقلال $X$ و $Y$ است. امید ریاضی شرطی $Y$ عبارت است از:

$$E(Y\ X)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y|x)dx=\mu_y+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_x)$$

$$=(\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\mu_x)+\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}X=\alpha+\beta X$$

$$\alpha=\mu_y-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\quad,\ \beta=\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

همچنین واریانس شرطی $Y$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(Y|X)=\sigma^2_{y|x}=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-E(y|x))^2f(y|x)dy=\sigma_y^2(1-\rho^2)$$

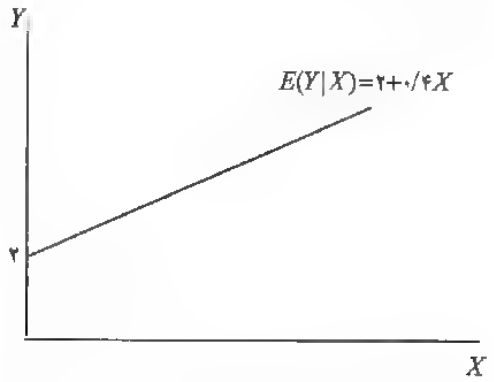
**مثال ۲:** اگر $\mu_x=5$، $\mu_y=4$، $\sigma_x=4$، $\sigma_y=2$ و $\rho=0/8$ باشد، معادله رگرسیون را رسم کنید.

$$\alpha=4-(0/8\times\frac{2}{4})5=2\ ,\ \beta=0/8\times\frac{2}{4}=0/4$$

$$E(Y|X)=2+0/4X$$

واریانس شرطی $Y$ عبارت است از:

$$\sigma^2_{y|x}=2^2(1-0/8^2)=1/44$$




نمودار ۲-۲: امید ریاضی شرطی خطی در توزیع نرمال

به‌هرحال طبق رابطه (۱-۲) امید ریاضی شرطی $Y$ تابعی از $X$ است. اگر توزیع مشترک $X$ و $Y$ نرمال باشد، آنگاه امید ریاضی شرطی $Y$ تابع خطی از $X$ خواهد بود. اگر امید ریاضی شرطی $Y$ غیرخطی باشد می‌توان آن را با استفاده از بسط توابع با تقریب مرتبه اول، خطی نمود.[1]

به‌طور کلی، امید ریاضی شرطی $Y$ را به‌صورت $E(Y|X)=\alpha+\beta X$ در نظر می‌گیریم. اما بدیهی است که مقادیر واقعی $Y$ با $E(Y|X)$ تفاوت دارند و در این خصوص مرتکب خطا می‌شویم. به همین دلیل لازم است که این خطاها را وارد این معادله نماییم.

### ۲-۳ جملهٔ خطا و معادله رگرسیون

بنا بر آنچه گفته شد معادله (۲-۲) فقط آن بخش از تغییرات $Y$ را توضیح می‌دهد که متأثر از متغیر $X$ می‌باشد. حال تأثیر بقیه عوامل را که تصادفی و غیر قابل کنترل هستند در این معادله وارد می‌کنیم. اثر سایر عوامل را با $u$ نشان می‌دهیم. بنابراین برای هر مقدار از $Y$ می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$Y=E(Y|X)+u \quad \Rightarrow \quad Y=\alpha+\beta X+u \qquad (۲-۳)$$

---

[1] تقریب خطی تابع $g(x)$ در $x=a$ عبارت است از:

$$g(x)\cong g(a)+g'(a)(x-a)$$

که در اینجا $\alpha=g(a)-g'(a)a$ و $\beta=g'(a)$ خواهد بود.

بدین ترتیب طبق الگوی (۳-۲) تغییرات $Y$ به دو دسته تقسیم می‌شود: یکی تغییراتی که متأثر از $X$ است و آن را قابل کنترل و غیرتصادفی می‌دانیم که اصطلاحاً به آن «جزء معین یا غیرتصادفی» می‌گویند و دیگری تغییراتی که ناشی از عوامل تصادفی و غیرقابل کنترل است که اصطلاحاً به آن «جزء تصادفی» یا «جزء اختلال» یا «جمله خطا» می‌گویند.

حال معادله (۳-۲) را برای مشاهده $i$ام می‌نویسیم:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad (۲-۴)$$

از آنجا که $u_i$ تحت تأثیر عوامل متعددی قرار دارد و تصادفی می‌باشد، لذا $u_i$ یک متغیر تصادفی است. از طرف دیگر هر متغیر تصادفی خصوصیاتی دارد که توسط توزیع آن متغیر و فروض مربوط به آن بیان می‌شود. در ادامه بحث، به بررسی فروض مربوط به جملهٔ اختلال می‌پردازیم.

## ۲-٤ فروض معادله رگرسیون

فروض معادله رگرسیون یا فروض کلاسیک، خصوصیات جزء تصادفی مدل رگرسیون را تبیین می‌کند. این فروض عبارتند از:

| | |
|---|---|
| ۱) $E(u_i \mid X)=۰$ | فرض میانگین صفر |
| ۲) $\mathrm{var}(u_i \mid X)=E(u_i^۲ \mid X)=\sigma^۲<\infty$ | فرض واریانس همسانی |
| ۳) $\mathrm{cov}(u_k, u_j)=E(u_k u_j)=۰ \quad k \neq j$ | فرض عدم خودهمبستگی |
| ۴) $\mathrm{cov}(u_i, X_i)=۰$ | فرض استقلال جزء تصادفی $(u_i)$ از جزء غیرتصادفی $(X_i)$ |
| ۵) $u_i \sim \mathrm{N}(۰, \sigma^۲)$ | فرض نرمال بودن |

مفاهیم مربوط به این فروض در مثال زیر ارائه شده است:

فرض کنید که نمرهٔ امتحان دانشجویی $(Y)$ تابعی از میزان ساعات مطالعه وی $(X)$ در روز قبل از امتحان باشد. بدیهی است که عوامل بی‌شمار دیگری نیز دخیل هستند که آنها را با $u$ نشان می‌دهیم، از قبیل این که دوستش به او تلفن بزند و یک ساعت وقت او را بگیرد، مهمان برای آنها بیاید، برق قطع شود، کتابش گم شود و هزاران مسئلهٔ دیگر. اینها عوامل غیرقابل کنترل هستند. همچنین فرض کنید که رابطهٔ $E(Y \mid X)=۴+۰/۸X$ برقرار باشد. این رابطه بیانگر یک «رابطه

انتظاری» است. مثلاً انتظار بر این است که اگر ۱۰ ساعت مطالعه کند ($X=۱۰$)، نمره وی ۱۲ خواهد شد. اما به‌دلیل وجود عوامل تصادفی ممکن است عملاً به نمرهٔ ۱۲ دست پیدا نکند و به نتیجهٔ دیگری برسد. همان‌طور که گفته شد $X$ متغیر قابل کنترل ولی $u$ متغیر تصادفی است:

$$Y_i = E(Y \mid X) + u_i = (۴ + ۰/۸X_i) + u_i \quad \Rightarrow \quad u_i = Y_i - (۴ + ۰/۸X_i)$$

حال فرض کنید مشاهده $k$ام بدین صورت بوده که او ۱۰ ساعت مطالعه کند و نمرهٔ امتحانش برابر با ۱۲/۵ شده باشد. در این شرایط مشاهده $k$ام به‌صورت $(X_k = ۱۰, Y_k = ۱۲/۵)$ می‌باشد و آنگاه $u_k$ برابر است با:

$$u_k = Y_k - (۴ + ۰/۸X_k) = ۱۲/۵ - (۴ + ۰/۸ \times ۱۰) = ۱۲/۵ - ۱۲ = ۰/۵$$

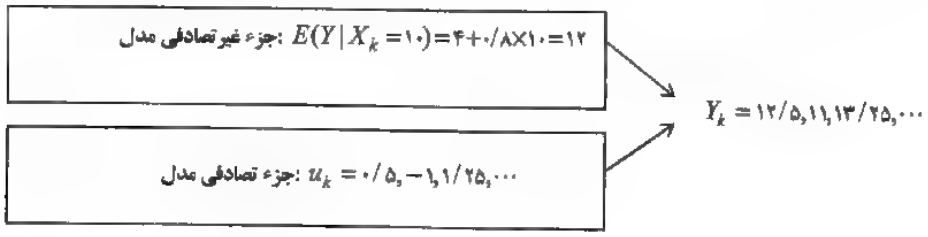
حال تصور کنید که این آزمایش را بتوان تکرار کرده و به روز قبل از امتحان برگردیم و مشاهده $k$ام را یک بار دیگر اندازه‌گیری کنیم. در این حالت قسمت قابل کنترل همچنان مانند قبل است، یعنی $X_k = ۱۰$ و $E(Y|X_k = ۱۰) = ۴ + ۰/۸ \times ۱۰ = ۱۲$ می‌باشد. اما نمره او به‌دلیل وجود عوامل تصادفی برابر با ۱۲/۵ نخواهد شد و به‌عنوان مثال برابر با ۱۱ شود:

$$u_k = Y_k - (۴ + ۰/۸X_k) = ۱۱ - (۴ + ۰/۸ \times ۱۰) = ۱۱ - ۱۲ = -۱$$

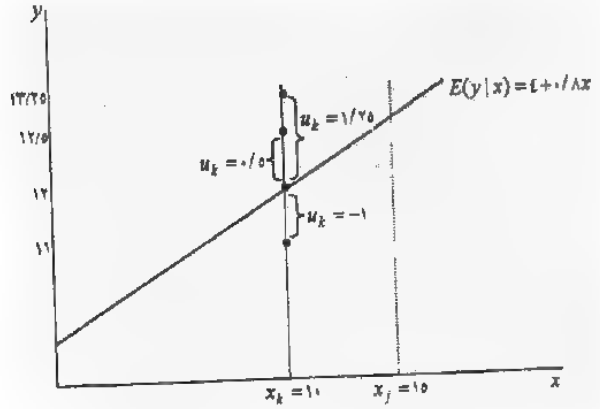
اگر آزمایش را دوباره تکرار کنیم و به روز قبل از امتحان برگردیم و $X_k$ را در سطح ۱۰ کنترل کنیم، این بار نمره او ممکن است به‌عنوان مثال برابر با ۱۳/۲۵ شود:

$$u_k = Y_k - (۴ + ۰/۸X_k) = ۱۳/۲۵ - (۴ + ۰/۸ \times ۱۰) = ۱۳/۲۵ - ۱۲ = ۱/۲۵$$

اگر این آزمایش را مجدداً تکرار کنیم و جزء غیرتصادفی را در سطح $X_k = ۱۰$ کنترل کنیم، به $Y_k$های متفاوتی می‌رسیم که ناشی از عوامل تصادفی است. در این صورت جزء غیرتصادفی مدل همواره برابر با $E(Y|X_k = ۱۰) = ۴ + ۰/۸ \times ۱۰ = ۱۲$ خواهد بود. اما جزء تصادفی مدل چون قابل کنترل نمی‌باشد دارای مقادیر غیرقابل پیش‌بینی خواهد بود:



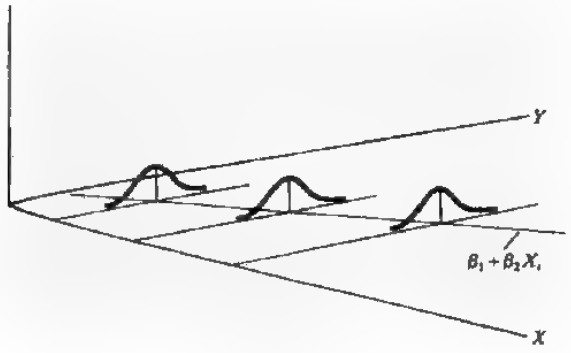
این بحث را روی نمودار نیز می‌توان نشان داد:




نمودار ۳-۲: خطاهای تصادفی و معادله رگرسیون

اگر این آزمایش را به تعداد زیاد تکرار کنیم آنگاه مشاهده خواهد شد که $u_k$ در اطراف عدد ۱۲ (در حالت کلی در اطراف $\alpha+\beta X_k$) نوسان می‌کند. در صورت تصادفی بودن $u_k$، میانگین آن باید صفر شود که یکی از فروض اساسی این مدل است.

اما مفهوم یکسان بودن واریانس $u_i$ این است که وقتی $X_k=۱۰$ است، پراکندگی (واریانس) $u_k$ برابر با $\sigma^۲$ می‌باشد. حال اگر آزمایش‌های تکراری را در سطح $X_j=۱۵$ نیز انجام دهیم در این صورت $Y_j$های مشاهده شده، ناشی از $X_j=۱۵$ و $u_j$ها خواهد بود. در اینجا نیز چون $E(Y|X_j=۱۵)=۴+۰/۸\times۱۵=۱۶$ است لذا $u_j$ها در اطراف عدد ۱۶ نوسان می‌کند که $E(u_j)=۰$ و واریانس آن $E(u_j)=\sigma^۲$ خواهد بود. این بدان معنا است که واریانس $u_i$ مستقل از $X_i$ است که موسوم به فرض «واریانس همسانی» می‌باشد. به‌عبارت دقیق‌تر $u_i$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\sigma^۲$ است که این توزیع، مستقل از مقدار $X_i$ می‌باشد. این مفهوم در نمـودار ۴-۲ نشان داده شده است:




نمودار ٤-٢

فرض عدم رابطه بین $u_i$ها بدین معنی است که $u_k$ و $u_j$ مستقل‌اند:

$$\operatorname{cov}(u_k, u_j) = E[(u_k - Eu_k)(u_j - Eu_j)] = E(u_k u_j) = ۰ \qquad k \neq j$$

این فرض موسوم به عدم «خودهمبستگی» است که در فصل چهارم بحث خواهد شد. مفهوم این فرض آن است که خطاهای تصادفی، مستقل هستند. به‌عبارت دیگر خطاهای امروز مستقل از خطاهای دیروز است. یا خطاها در یک آزمایش (مشاهده) مستقل از خطاها در آزمایش دیگر است. این بدان معنا است که خطاها باید واقعاً تصادفی باشند و هیچ نظم و ترتیبی در آنها مشاهده نشود. اگر خطاها نظام‌مند (سیستماتیک) باشند آنگاه دچار همبستگی خواهند شد.

فرض غیرتصادفی بودن $X$ بدین معنی است که در آزمایش‌های تکراری، $X_k$ ثابت است و لذا برای آن، $E(X_k) = X_k$ و $\operatorname{var}(X_k) = ۰$ خواهد بود[1]. بنابراین بدین نتیجه خواهیم رسید که $X_k$ و $u_k$ مستقل‌اند. به‌عبارت دیگر جزء تصادفی و جزء غیرتصادفی مستقل هستند. حتی اگر $X$ نیز تصادفی باشد، فرض بر این است که فرایندی که داده‌های $X$ را ایجاد می‌کند و فرایندی که $u$ را ایجاد می‌کند، مستقل‌اند.

$$\operatorname{cov}(u_k, X_k) = E[(u_k - Eu_k)(X_k - EX_k)] = E[u_k(X_k - EX_k)] = (Eu_k)E(X_k - EX_k) = ۰$$

بر اساس فروض فوق، می‌توان خصوصیات $Y_i$ را نیز بررسی نمود. از آنجا که $Y_i$ تابعی از $u_i$

---

۱- این نکته با این بحث که $X$ پراکندگی ندارد، اشتباه نشود. در اینجا منظور این است که $X_i$ در آزمایش‌های تکراری، ثابت است و لذا $\operatorname{var}(X_i) = ۰$ می‌باشد، اما واریانس $X$ که با $\operatorname{var}(X)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_x^۲ = \operatorname{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^۲}{n}$$

است، لذا $Y_i$ نیز یک متغیر تصادفی است. علاوه بر این، چون $u_i$ نرمال است لذا $Y_i$ که تابع خطی از $u_i$ است، نیز نرمال خوهدبود:

۱) $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$

۲) $E(Y|X_i) = \alpha + \beta X_i \quad , \quad E(u_i|X_i) = ۰$

۳) $\mathrm{var}(Y|X_i) = \sigma^۲_{y|x_i} = \mathrm{var}(u_i\ X_i) = \sigma^۲$

۴) $Y_i \sim \mathrm{N}(\alpha + \beta X_i, \sigma^۲)$

## ۵-۲ تحلیل رگرسیون تجربی

آنچه تا اینجا بررسی شد مربوط به مبانی نظری تحلیل رگرسیون می‌باشد. اما در مباحث تجربی، صرفاً با مجموعه‌ای از مشاهدات مواجه‌ایم که بر اساس نمونه‌گیری به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال در تحلیل رابطهٔ دو متغیر $X$ و $Y$ فقط مجموعه‌ای از داده‌های جفت‌شده را به‌صورت $(X_۱, Y_۱), (X_۲, Y_۲), \ldots, (X_n, Y_n)$ در اختیار داریم.

در تحلیل رگرسیون نظری بدین نتیجه رسیدیم که معادله رگرسیون نظری به‌صورت $E(Y|X_i) = \alpha + \beta X_i$ است. اولاً ممکن است این معادله، خطی نباشد ولی برای سادگی آن را خطی فرض کرده‌ایم که البته در صورت برقراری فرض نرمال بودن $u_i$، به تبع آن $Y_i$ نیز توزیع نرمال خواهد داشت و فرض خطی بودن می‌تواند واقعی باشد. ثانیاً معادله رگرسیون $E(Y|X_i) = \alpha + \beta X_i$ بیانگر مقدار انتظاری $Y_i$ است نه مقدار دقیق آن. در واقع برآورد ما از $Y_i$ طبق $\alpha + \beta X_i$ صورت می‌گیرد که برای ما قابل کنترل است. در حالی که مقدار واقعی $Y_i$ برابر با $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ است. ثالثاً معادله رگرسیون $E(Y|X_i) = \alpha + \beta X_i$ را نمی‌دانیم، زیرا $\alpha$ و $\beta$ مجهول هستند. بنابراین مشکل اصلی این است که چگونه $\alpha$ و $\beta$ را تعیین کنیم. فرض کنید که به هر طریقی $\alpha$ و $\beta$ را برآورد کرده و آن را با $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ نشان دهیم. در این صورت برآورد ما از $Y_i$ برابر با $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$ خواهد بود که متفاوت از $\alpha + \beta X_i$ است. بنابراین اگر برآوردی را که طبق معادله $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$ به‌دست می‌آوریم با $\hat{Y}_i$ نشان دهیم آنگاه در رسیدن به $Y_i$ دچار خطایی به اندازه $Y_i - \hat{Y}_i$ خواهیم شد که آن را با $e_i$ نشان می‌دهیم. لذا در تحلیل رگرسیون تجربی، رابطه $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$ و $Y_i = (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i) + e_i$ را داریم. در واقع به‌جای $\alpha + \beta X_i$ از $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$ و

به‌جای $u_i$ از $e_i$ استفاده می‌کنیم. به‌طور خلاصه، تحلیل رگرسیون نظری و تجربی در جدول زیر نشان داده شده است:

| مقدار واقعی | مقدار تخمینی | | مقدار خطا | |
|---|---|---|---|---|
| | رگرسیون نظری | رگرسیون تجربی | خطای واقعی | خطای تخمینی |
| $Y_i$ | $E(Y\|X_i)=\alpha+\beta X_i$ | $\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$ | $u_i=Y_i-E(Y\|X_i)$ $=Y_i-(\alpha+\beta X_i)$ | $\hat{u}_i=e_i=Y_i-\hat{Y}_i$ $=Y_i-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i)$ |

به‌هرحال چون $\alpha$ و $\beta$ را نمی‌دانیم لذا امکان دسترسی به معادلهٔ $E(Y|X_i)=\alpha+\beta X_i$ وجود ندارد و به ناچار باید از تخمین $\alpha$ و $\beta$ استفاده کنیم تا بدین طریق معادله $\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$ را جایگزین معادلهٔ $E(Y|X_i)=\alpha+\beta X_i$ کنیم. بدین ترتیب بحث بعدی ما راجع به برآورد ضرایب $\alpha$ و $\beta$ خواهد بود.

### ۶-۲ تخمین معادله رگرسیون

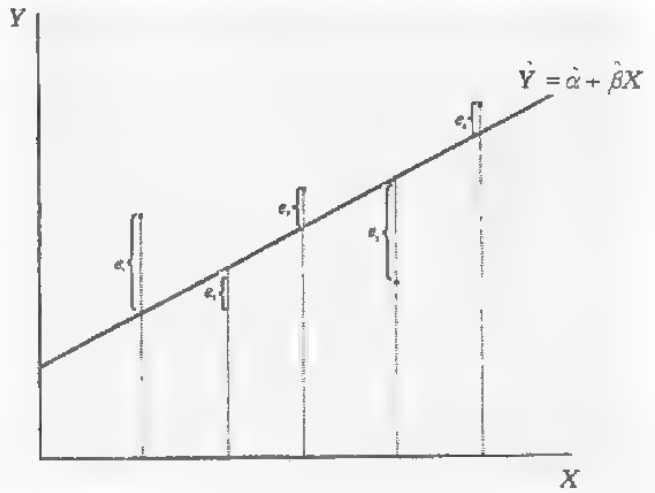
همان‌طور که در بخش قبلی اشاره شد، در مطالعات کاربردی صرفاً داده‌های نمونه را داریم که شامل $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ می‌باشد. حال با استفاده از این داده‌ها، ضرایب $\alpha$ و $\beta$ را برآورد می‌کنیم. فرض کنید که $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ تخمین $\alpha$ و $\beta$ باشند. در این صورت روابط زیر را داریم:

$$\text{مقدار واقعی}=Y_i$$

$$\text{مقدار تخمینی}=\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i \qquad (۲-۵)$$

$$\text{مقدار خطا}=\hat{u}_i=e_i=Y_i-\hat{Y}_i=Y_i-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i) \qquad (۲-۶)$$

یکی از معیارهای مناسب برای تعیین $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ این است که خطا را حداقل کنیم. بدین منظور اگر مشاهدات $X$ و $Y$ را روی نمودار ترسیم کنیم، نقاط پراکنده‌ای به‌دست می‌آید که باید خط رگرسیون به‌گونه‌ای از بین این نقاط بگذرد که کمترین خطا را به‌وجود آورد. فرض کنید که ۵ مشاهده برای $X$ و $Y$ داریم که در نمودار ۵-۲ ترسیم شده است.




نمودار ۵-۲: خط رگرسیون تجربی

از آنجا که خطاهای مثبت و منفی همدیگر را خنثی می‌کنند، لذا مجموع خطاها، یعنی $\sum e_i$ برابر صفر است. بدین منظور از مجموع مجذور خطاها استفاده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2 \qquad (۲-۷)$$

در تخمین $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ بایستی مجموع مربعات خطا، حداقل شود. این روش، معروف به روش حداقل مربعات معمولی (OLS)[1] است. با جایگذاری از (۶-۲) در (۷-۲) خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)^2 \qquad (۲-۸)$$

عبارت فوق وقتی حداقل می‌شود که خط رگرسیون به‌گونه‌ای ترسیم شود که در مجموع، کمترین خطا را ایجاد کند. بدیهی است که موقعیت خط رگرسیون بستگی به عرض از مبدأ آن ($\hat{\alpha}$) و شیب آن ($\hat{\beta}$) دارد. لذا $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را به‌گونه‌ای تعیین می‌کنیم که مجموع مجذور خطا را حداقل نماید. این کار را می‌توان با مشتق‌گیری نسبت‌به $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ انجام داد:

[1] Ordinary Least Squares

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\alpha}} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0$$
$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)(-X_i) = 0$$

با ساده نمودن این معادلات، خواهیم داشت:

$$\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i) = 0 \quad \text{یا} \quad \sum e_i = 0 \qquad (۲-۹)$$
$$\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_i)X_i = 0 \quad \text{یا} \quad \sum e_i X_i = 0$$

معادلات (۹-۲) معروف به معادلات نرمال هستند. با حل معادله اول خواهیم داشت:

$$\sum Y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum X_i = 0 \Rightarrow \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}$$

حال به‌جای $\hat{\alpha}$ در معادله دوم قرار داده و $\hat{\beta}$ را به‌دست می‌آوریم:[1]

$$\sum[Y_i - (\bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}) - \hat{\beta}X_i]X_i = 0 \Rightarrow \sum[(Y_i - \bar{Y}) - \hat{\beta}(X_i - \bar{X})]X_i = 0$$
$$\Rightarrow \sum[(Y_i - \bar{Y})X_i - \hat{\beta}(X_i - \bar{X})X_i] = 0$$

با حل معادله فوق برای $\hat{\beta}$ خواهیم داشت:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - Y)}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} \qquad (۲-۱۰)$$

از اینجا به بعد، حروف بزرگ را برای مقادیر معمولی متغیرها و حروف کوچک را برای انحراف از میانگین، استفاده می‌کنیم. لذا $X_i - \bar{X} = x_i$ و $Y_i - \bar{Y} = y_i$ می‌باشد. بر این اساس، $\hat{\beta}$ برابر است با:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

که $\sum x_i^2 = \sum(X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$ و $\sum x_i y_i = \sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$ است.

---

[1] توجه شود که روابط زیر برقرار است:

$$\sum(X_i - \bar{X})X_i = \sum(X_i - \bar{X})^2$$
$$\sum(Y_i - \bar{Y})X_i = \sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

**مثال۲-۲:** مشاهدات $X$ شامل ۱، ۲، ۳، ۳، ۲، ۴، ۶، ۷، ۸، ۶، ۹، ۸، ۷، ۸، ۹، ۹، ۱۰، ۱۰، ۷ و ۹ و $Y$ شامل ۵، ۶، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۲، ۱۰، ۱۰، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۵، ۱۰، ۱۴، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۱۸ و ۱۸ می‌باشد. معادله رگرسیون $Y$ روی $X$ را برآورد کنید.

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_i^2$ | $Y_i^2$ | $X_iY_i$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۵ | ۱ | ۲۵ | ۵ |
| ۲ | ۶ | ۴ | ۳۶ | ۱۲ |
| ۳ | ۵ | ۹ | ۲۵ | ۱۵ |
| ۳ | ۷ | ۹ | ۴۹ | ۲۱ |
| ۲ | ۸ | ۴ | ۶۴ | ۱۶ |
| ۴ | ۹ | ۱۶ | ۸۱ | ۳۶ |
| ۶ | ۱۲ | ۳۶ | ۱۴۴ | ۷۲ |
| ۷ | ۱۰ | ۴۹ | ۱۰۰ | ۷۰ |
| ۸ | ۱۰ | ۶۴ | ۱۰۰ | ۸۰ |
| ۶ | ۱۲ | ۳۶ | ۱۴۴ | ۷۲ |
| ۹ | ۱۴ | ۸۱ | ۱۹۶ | ۱۲۶ |
| ۸ | ۱۵ | ۶۴ | ۲۲۵ | ۱۲۰ |
| ۷ | ۱۵ | ۴۹ | ۲۲۵ | ۱۰۵ |
| ۸ | ۱۰ | ۶۴ | ۱۰۰ | ۸۰ |
| ۹ | ۱۴ | ۸۱ | ۱۹۶ | ۱۲۶ |
| ۹ | ۱۶ | ۸۱ | ۲۵۶ | ۱۴۴ |
| ۱۰ | ۱۸ | ۱۰۰ | ۳۲۴ | ۱۸۰ |
| ۱۰ | ۲۰ | ۱۰۰ | ۴۰۰ | ۲۰۰ |
| ۷ | ۱۸ | ۴۹ | ۳۲۴ | ۱۲۶ |
| ۹ | ۱۸ | ۸۱ | ۳۲۴ | ۱۶۲ |
| ۱۲۸ | ۲۴۲ | ۹۷۸ | ۳۳۳۸ | ۱۷۶۸ |

$$\overline{X}=\frac{۱۲۸}{۲۰}=۶/۴ \quad , \quad \overline{Y}=\frac{۲۴۲}{۲۰}=۱۲/۱$$

$$\sum x_i^2 = ۹۷۸-۲۰(۶/۴)^2 = ۱۵۸/۸$$

$$\sum y_i^2 = ۳۳۳۸-۲۰(۱۲/۱)^2 = ۴۰۹/۸$$

$$\sum x_i y_i = ۱۷۶۸-۲۰(۶/۴)(۱۲/۱)=۲۱۹/۲$$

$$\hat{\beta}=\frac{۲۱۹/۲}{۱۵۸/۸}=۱/۳۸ \quad , \quad \hat{\alpha}=۱۲/۱-۱/۳۸\times۶/۴=۳/۲۶۶$$

تخمین معادله رگرسیون عبارت است از:

$$\hat{Y}_i = ۳/۲۶۶+۱/۳۸X_i$$

## ۲-۷ خواص تخمین‌زننده‌های OLS

هر تخمین‌زننده‌ای بایستی برخی خواص مطلوب را داشته باشد. در این راستا، تخمین‌زننده‌های OLS را اصطلاحاً «بهترین تخمین خطی بدون تورش»[1] می‌گویند. در اینجا هر یک از این خواص را بررسی می‌کنیم.

[1] Best Linear Unbaised Estimation (BLUE)

### ۲-۷-۱ تخمین‌زنندهٔ خطی

$\hat{\beta}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت[1]:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}=\frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}=\sum w_i Y_i$$
$$=\sum w_i(\alpha+\beta X_i+u_i)=\beta+\sum w_i u_i \quad ; \quad w_i=\frac{x_i}{\sum x_i^2} \qquad (۲-۱۱)$$

در اینجا از روابط $\sum w_i=0$ و $\sum w_i X_i=1$ استفاده شده است. بدین‌ترتیب ملاحظه می‌شود که $\hat{\beta}$ تابع خطی از متغیرهای تصادفی نرمال است و لذا $\hat{\beta}$ نیز یک متغیر تصادفی نرمال می‌باشد.

### ۲-۷-۳ بدون تورش بودن

با توجه به فرض غیر تصادفی بودن $X_i$ و استقلال آن از $u_i$، خواهیم داشت:

$$E(\hat{\beta})=E(\beta+\sum w_i u_i)=\beta+\sum w_i E(u_i)=\beta \qquad (۲-۱۲)$$

زیرا $E(u_i)=0$ است.

### ۲-۷-۳ سازگاری

سازگاری یک تخمین‌زنندهٔ بدون تورش بیانگر آن است که با افزایش حجم نمونه، واریانس آن به‌سمت صفر میل کند. بدین منظور واریانس $\hat{\beta}$ را حساب می‌کنیم. با استفاده از (۲-۱۱) داریم:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta})=E(\hat{\beta}-\beta)^2=E(\sum w_i u_i)^2=\sum_{i=1}^{n}E(w_i u_i)^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=i\\ i\neq j}}^{n}E(w_i w_j u_i u_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}w_i^2E(u_i^2)+\sum_{i}\sum_{\substack{j\\ i\neq j}}w_i w_j E(u_i u_j)=\sum_{i=1}^{n}w_i^2\sigma^2=\sigma^2\sum_{i}w_i^2=\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \qquad (۲-۱۳)$$

زیرا $E(u_i u_j)$ طبق فرضِ عدم خودهمبستگی $u_i$ها، برابر با صفر است[2]. واریانس $\hat{\beta}$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

---

[1] روابط $\sum x_i=0$ ، $\sum x_i X_i=\sum x_i^2$ و $\sum x_i y_i=\sum x_i Y_i=\sum X_i y_i$ می‌باشد.

[2] توجه شود که $\sum w_i^2$ برابر است با:

$$\sum w_i^2=\sum\left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)^2=\frac{\sum x_i^2}{\left(\sum x_i^2\right)^2}=\frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2/n}{\sum x_i^2/n} = \frac{\sigma^2/n}{S_x^2}$$

چون $S_x^2$ مقدار معینی دارد و با افزایش حجم نمونه نیز مقدار آن معلوم و معین است، لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\lim \sigma^2/n}{\lim S_x^2} = 0$$

زیرا $\lim \sigma^2/n$ برابر صفر است. بنابراین، $\hat{\beta}$ یک تخمین‌زنندهٔ سازگار است.

### ۲-۷-۴ حداقل واریانس

قضیه گوس- مارکف بیان می‌دارد که از بین تمامی تخمین‌زننده‌های خطی و بدون تورش، روش OLS کمترین واریانس را دارد. بدین منظور، مشابه با (۱۱-۲) تخمین‌زنندهٔ خطی دیگری مانند $\tilde{\beta}$ را در نظر بگیرید:

$$\tilde{\beta} = \sum a_i Y_i = \sum a_i(\alpha + \beta X_i + u_i) = \alpha \sum a_i + \beta \sum a_i X_i + \sum a_i u_i$$

امید ریاضی $\tilde{\beta}$ عبارت است از:

$$E(\tilde{\beta}) = \alpha \sum a_i + \beta \sum a_i X_i$$

برای اینکه $\tilde{\beta}$ بدون تورش باشد بایستی شرط $\sum a_i = 0$ و $\sum a_i X_i = 1$ برقرار باشد.

واریانس $\tilde{\beta}$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(\tilde{\beta}) = E(\tilde{\beta} - \beta)^2 = E\left(\sum a_i u_i\right)^2 = E\left(\sum a_i^2 u_i^2\right) = \sigma^2 \sum a_i^2$$

با توجه به اینکه $a_i$ با $w_i$ متفاوت است، لذا آن را به‌صورت $a_i = w_i + b_i$ می‌نویسیم (توجه شود که چون $\sum a_i = \sum w_i = 0$ و $\sum a_i X_i = \sum w_i X_i = 1$ است، لذا بایستی $\sum b_i X_i = 0$ باشد):

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\tilde{\beta}) &= \sigma^2 \sum a_i^2 = \sigma^2 \sum (w_i + b_i)^2 \\ &= \sigma^2 \sum (w_i^2 + b_i^2) = \sigma^2 \sum w_i^2 + \sigma^2 \sum b_i^2 = \mathrm{var}(\hat{\beta}) + \sigma^2 \sum b_i^2\end{aligned}$$

چون $\sigma^2 \sum b_i^2$ غیر منفی است لذا $\mathrm{var}(\tilde{\beta}) \geq \mathrm{var}(\hat{\beta})$ می‌باشد و نتیجه می‌شود که تخمین‌زنندهٔ OLS کاراتر است.

### ۵-۷-۲ توزیع تخمین‌زننده‌های OLS

امید ریاضی و واریانس $\hat{\beta}$ نشان می‌دهد که تخمین‌زنندهٔ بدون تورش و با حداقل واریانس برای $\beta$ است. از طرف دیگر چون $\hat{\beta}$ تابع خطی از $u_i$ است لذا $\hat{\beta}$ نیز یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال می‌باشد. مشابه این محاسبات را برای $\hat{\alpha}$ نیز می‌توان انجام داد[1]. بدین ترتیب مشخصات تخمین‌زننده‌های OLS عبارت است از:

$$\hat{\beta}=\beta+\sum w_i u_i \quad , \quad w_i=\sum\left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)$$

$$\hat{\alpha}=\alpha+\sum k_i u_i \quad , \quad k_i=\frac{1}{n}-\bar{X}\frac{x_i}{\sum x_i^2} \qquad (۲-۱۴)$$

$$\hat{\beta}\sim \mathrm{N}\left(\beta,\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right) \quad , \quad \hat{\alpha}\sim \mathrm{N}\left(\alpha,(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}}{\sum x_i^2})\sigma^2\right)$$

### ۶-۷-۲ همبستگی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$

همبستگی تخمین‌زننده‌های $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ باعث می‌شود که تغییر یکی بر دیگری تأثیر بگذارد. بدین منظور کوواریانس $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را حساب می‌کنیم:

$$\mathrm{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta})=E\left[(\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)\right]$$

به‌جای $\hat{\alpha}-\alpha$ و $\hat{\beta}-\beta$ از (۲-۱۴) قرار می‌دهیم:

$$E\left[(\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)\right]=E\left[\sum_i k_i u_i\right]\left[\sum_i w_i u_i\right]$$

چون امیدریاضی $u_i u_j$ به‌ازای $i\neq j$ برابر صفر است، لذا خواهیم داشت:

$$E\left[(\hat{\alpha}-\alpha)(\hat{\beta}-\beta)\right]=E\left[\sum_i k_i w_i u_i^2\right]=\sigma^2\sum_i k_i w_i u_i$$

به‌جای $k_i$ و $w_i$ از (۲-۱۴) قرار داده و آن را ساده می‌کنیم که طبق آن، خواهیم داشت:

---

[1] برای محاسبهٔ امید ریاضی و واریانس $\hat{\alpha}$ لازم است آن را به صورت زیر بنویسیم:

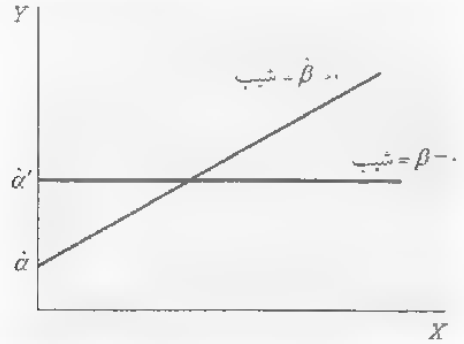
$$\hat{\alpha}=\bar{Y}-\bar{X}\hat{\beta}=\frac{\sum Y_i}{n}-\bar{X}\frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

$$=\sum\left(\frac{1}{n}-\bar{X}\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)Y_i=\sum k_i Y_i \ , \ k_i=\frac{1}{n}\frac{\bar{X}x_i}{\sum x_i^2}$$

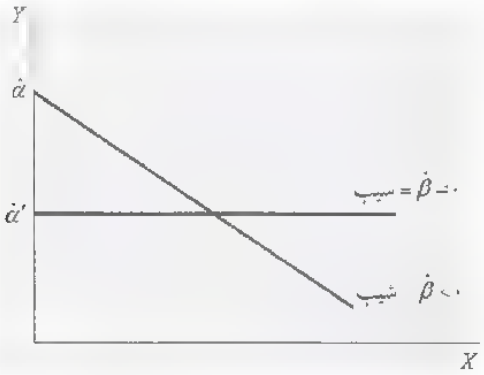
$$=\sum k_i(\alpha+\beta X_i+u_i)=\alpha+\sum k_i u_i \ , \ \sum k_i X_i=0 \ , \ \sum k_i=1$$

$$\operatorname{cov}(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = -\bar{X}\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} = -\bar{X}\operatorname{var}(\hat{\beta}) \qquad (۲-۱۵)$$

مقدار این کوواریانس، منفی است و بدان معنا است که مثلاً اگر $X$ را حذف کنیم معادل با آن است که $\beta$ را برابر با صفر قرار داده‌ایم و این منجر به افزایش $\hat{\alpha}$ می‌شود (البته مشروط به آن که $\beta \geq 0$ باشد). یعنی یک معادله با شیب مثبت را تبدیل به یک خط افقی با شیب صفر کرده‌ایم که عرض از مبدأ آن افزایش می‌یابد.




ولی اگر $\beta \leq 0$ باشد، آنگاه حذف $X$ و صفر قرار دادن $\beta$ موجب می‌شود که یک رگرسیون نزولی را تبدیل به یک رگرسیون افقی کنیم. بنابراین، $\beta$ را افزایش داده‌ایم (از منفی به صفر) و لذا $\hat{\alpha}$ کاهش می‌یابد (چون کوواریانس $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ منفی است).




همچنین می‌توان اثر حذف $\hat{\alpha}$ بر $\hat{\beta}$ را نیز بررسی نمود که این موضوع در فصل چهارم بررسی شده است.

## ۲-۸ تغییرات کل[1]، تغییرات توضیح داده شده[2] و تغییرات توضیح داده نشده[3]

تغییرات کل $Y$ بیانگر مجموع مجذور تغییرات $Y$ حول $\bar{Y}$ است:

$$\text{کل تغییرات } Y = \sum(Y_i-\bar{Y})^2 = \sum y_i^2 = TSS$$

تغییرات توضیح داده شده بیانگر آن بخش از تغییرات $Y$ است که توسط معادله رگرسیون، توضیح داده می‌شود:

$$\text{تغییرات توضیح داده شدهٔ } Y \text{ توسط معادله رگرسیون} = \sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 = \sum \hat{y}_i^2 = ESS$$

تغییرات توضیح داده نشده بیانگر آن بخش از تغییرات $Y$ است که ناشی از سایر عوامل است که برابر با مجموع مجذور خطاها است:

$$\text{تغییرات توضیح داده نشده یا خطاها یا باقیمانده‌ها} = \sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2 = \sum e_i^2 = RSS$$

بدیهی است که رابطه $TSS=ESS+RSS$ برقرار است. بدین منظور توجه شود که اگر از $\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}$ به‌جای $\hat{\alpha}$ در معادله $\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$ قرار دهیم، رابطه $\hat{Y}_i-\bar{Y}=\hat{\beta}(X_i-\bar{X})$ به‌دست می‌آید که بر اساس آن، $ESS$ عبارت است از:

$$ESS=\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2=\hat{\beta}^2\sum x_i^2=\hat{\beta}\sum x_i y_i$$

از طرف دیگر اگر در معادله $Y_i=\hat{Y}_i+e_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i+e_i$ به‌جای $\hat{\alpha}$ قرار دهیم، نتیجهٔ $Y_i-\bar{Y}=\hat{\beta}(X_i-\bar{X})+e_i$ یا $y_i=\hat{\beta}x_i+e_i$ به‌دست می‌آید. لذا $TSS$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} TSS &= \sum(Y_i-\bar{Y})^2=\sum y_i^2=\sum(\hat{\beta}x_i+e_i)^2 \\ &= \hat{\beta}^2\sum x_i^2+\sum e_i^2+2\hat{\beta}\sum x_i e_i \\ &= \hat{\beta}^2\sum x_i^2+\sum e_i^2=ESS+RSS \end{aligned} \qquad (۲-۱۶)$$

عبارت $\sum x_i e_i$ برابر با صفر است، زیرا $\sum x_i e_i=\sum(X_i-\bar{X})e_i=\sum e_i X_i-\bar{X}\sum e_i$ بوده و طبق معادلات (۲-۹)، این دو جمله برابر با صفر می‌باشند.

---

[1] TSS–Total Sum of Squares
[2] ESS= Explaind Sum of Squares
[3] RSS=Residual Sum of Squares

### ۹-۲ ضریب تعیین ($R^2$)

بعد از تخمین معادله رگرسیون، اولین سؤال این است که تا چه اندازه تخمین $\hat{Y}_i$ به $Y_i$ نزدیک است. به‌عبارت دیگر، چقدر معادله رگرسیون تخمینی، معادله خوبی است و می‌تواند تغییرات $Y$ را توضیح دهد. در اینجا از معیاری به نام «ضریب تعیین» استفاده می‌شود که بیانگر نسبت تغییرات توضیح داده شده ($ESS$) به تغییرات کل است:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

با جایگذاری به‌جای $TSS$ و $TSS$ خواهیم داشت:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta}^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2} = \frac{\hat{\beta} \sum x_i y_i}{\sum y_i^2} \qquad (۲-۱۷)$$

اگر به‌جای $\hat{\beta}^2$ قرار دهیم نتیجه می‌شود که ضریب تعیین برابر با مجذور ضریب همبستگی است. همچنین می‌توان ضریب تعیین را به‌صورت زیر نوشت:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{TSS - RSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

بدین ترتیب $R^2$ بیانگر قدرت توضیح دهندگی یا ضریب خوبیِ مدل می‌باشد.

همان‌طور که گفته شد، $R^2$ معیاری برای قدرت توضیح‌دهندگی معادله رگرسیون است. یعنی نشان می‌دهد که $\hat{Y}_i$ها تا چه اندازه همسو با $Y_i$ها هستند. لذا $R^2$ برابر با مجذور ضریب همبستگی بین $\hat{Y}_i$ و $Y_i$ است. بدین منظور ابتدا $ESS$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$ESS = \sum \hat{y}_i^2 = \sum \hat{y}_i \hat{y}_i = \sum \hat{y}_i (y_i - e_i) \quad ; \quad y_i = \hat{y}_i + e_i$$

$$= \sum \hat{y}_i y_i + \sum \hat{y}_i e_i = \sum \hat{y}_i y_i$$

که $\sum \hat{y}_i e_i = 0$ است.[1] حال $R^2$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

---

[1] با استفاده از $\hat{y}_i = \hat{\beta} x_i$ خواهیم داشت:

$$\sum \hat{y}_i e_i = \sum \hat{\beta} x_i e_i = \hat{\beta} \sum e_i x_i = 0$$

طبق معادلات نرمال، $\sum e_i x_i = 0$ است.

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{(ESS)^2}{(TSS)(ESS)}=\frac{(\sum \hat{y}_i y_i)^2}{\sum(y_i^2)(\sum \hat{y}_i^2)}=r_{\hat{y}y}^2$$

بنابراین $R^2$ برابر با مجذور ضریب همبستگی بین $\hat{Y}$ و $Y$ است.

**مثال۳-۲:** در مثال ۲-۲ ضریب تعیین را محاسبه کنید:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}$$

$$ESS=\hat{\beta}^2\sum x_i^2=(۱/۳۶)^2(۱۵۸/۸)=۳۰۲/۵۷$$

$$TSS=\sum y_i^2=۳۳۳۸-۲۰(۱۲/۱)^2=۴۰۹/۸$$

$$R^2=\frac{۳۰۲/۵۷}{۴۰۹/۸}=۰/۷۳۸$$

بنابراین رگرسیون تخمینی توانسته است حدود ۷۳/۸ درصد از تغییرات $Y$ را توضیح دهد و بقیه آن ناشی از عوامل تصادفی $(u)$ می‌باشد.

### ۲-۱۰ میانگین خطای تخمین یا انحراف معیار رگرسیون( $\hat{\sigma}$ )

میانگین خطای تخمین یا انحراف معیار رگرسیون، میزان پراکندگی مشاهدات را در اطراف خط رگرسیون نشان می‌دهد. وقتی خط رگرسیون به مشاهدات واقعی نزدیکتر باشد، خطای کمتری دارد و لذا انحراف معیار کوچکتر است. به‌طورکلی، انحراف معیار معادلات رگرسیون بیانگر متوسط خطای معادله رگرسیون است. خطای معادله رگرسیون را می‌توان با محاسبه واریانس شرطی $Y$ یا واریانس جملهٔ خطا، محاسبه نمود که برابر با تخمین $\hat{\sigma}^2$ است.

برای محاسبه $\hat{\sigma}_2$ لازم است که ابتدا $\sum(e_i-\bar{e})^2=\sum e_i^2$ را حساب کنیم. بدین منظور معادله $Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$ را جمع زده و به‌صورت $\sum Y_i=n\alpha+\beta\sum X_i+\sum u_i$ می‌نویسیم که با تقسیم آن بر $n$، معادله $\bar{Y}=\alpha+\beta\bar{X}+\bar{u}$ به‌دست می‌آید. حال معادله زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$Y_i-\bar{Y}=(\alpha+\beta X_i+u_i)-(\alpha+\beta\bar{X}+\bar{u})=\beta(X_i-\bar{X})+(u_i-\bar{u})$$

$$y_i=\beta x_i+(u_i-\bar{u})$$

از طرف دیگر، چون $\bar{Y}=\bar{\hat{Y}}$ است، خطای تخمین را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$e_i=Y_i-\hat{Y}_i=(Y_i-\bar{Y})-(\hat{Y}_i-\bar{Y})=y_i-\hat{y}_i$$

$$=\beta x_i+(u_i-\bar{u})-\hat{\beta}x_i=-(\hat{\beta}-\beta)x_i+(u_i-\bar{u})$$

مجموع مجذور خطاها برابر است با:

$$\sum e_i^2=\sum\left(-(\hat{\beta}-\beta)x_i+(u_i-\bar{u})\right)^2$$
$$=(\hat{\beta}-\beta)^2\sum x_i^2+\sum(u_i-\bar{u})^2-2(\hat{\beta}-\beta)\sum x_i(u_i-\bar{u})$$

امید ریاضی $\sum e_i^2$ برابر است با (در جمله سوم از رابطه $\hat{\beta}-\beta=\sum x_iu_i$ و $\sum x_i(u_i-\bar{u})=\sum x_iu_i$ استفاده شده است).

$$E(\sum e_i^2)=\sum x_i^2E(\hat{\beta}-\beta)^2+E\left[\sum(u_i-\bar{u})^2\right]+2E\left[(\sum w_iu_i)(\sum x_iu_i)\right] \qquad (۲-۱۸)$$

حال امید ریاضی هر یک از عبارت‌های فوق را حساب می‌کنیم:

$$E(\hat{\beta}-\beta)=\mathrm{var}(\hat{\beta})=\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$E\left[\sum(u_i-\bar{u})^2\right]=\sigma^2E\left[\sum(\frac{u_i-\bar{u}}{\sigma})^2\right]=\sigma^2E(\chi^2_{n-1})=\sigma^2(n-1)$$

$$E\left[(\sum w_iu_i)(\sum x_iu_i)\right]=E\left(\sum w_ix_iu_i^2+\ldots\right)=E\left(\sum w_ix_iu_i^2\right)$$

$$=E\left(\sum\frac{x_i}{\sum x_i^2}x_iu_i^2\right)=E\left(\frac{\sum x_i^2u_i^2}{\sum x_i^2}\right)=\frac{\sum x_i^2E(u_i^2)}{\sum x_i^2}=\frac{\sum x_i^2\sigma^2}{\sum x_i^2}=\sigma^2$$

در محاسبه امید ریاضیِ جملهٔ آخر، امید ریاضی حاصل‌ضرب‌های متقاطع برابر صفر است، زیرا شامل حاصل‌ضرب‌هایی به شکل $u_iu_j$ است که امید ریاضی آنها صفر است (فرض عدم خودهمبستگی). بنابراین، با جایگذاری در (۱۸-۲) خواهیم داشت:

$$E(\sum e_i^2)=\sum x_i^2\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}+(n-1)\sigma^2-2\sigma^2=\sigma^2+(n-1)\sigma^2-\sigma^2=(n-2)\sigma^2 \qquad (۲-۱۹)$$

با تقسیم طرفین بر $n-2$، خواهیم داشت:

$$\sigma^2=\frac{E(\sum e_i^2)}{n-2}$$

بنابراین تخمین $\sigma^2$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum e_i^2}{n-2} \qquad (۲-۲۰)$$

بدین ترتیب $\hat{\sigma}^2$ تخمین زنندهٔ بدون تورش $\sigma^2$ است، زیرا طبق (۱۹-۲) خواهیم داشت:

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left(\frac{\sum e_i^2}{n-2}\right)=\frac{E(\sum e_i^2)}{n-2}=\frac{(n-2)\sigma^2}{n-2}=\sigma^2 \qquad (۲-۲۱)$$

$e_i$ از رابطه $e_i=Y_i-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i)$ محاسبه می‌شود که نیاز به $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ داریم. اما چون برای برآورد $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ از روابط $\sum e_i=0$ و $\sum e_iX_i=0$ استفاده شده است، لذا به‌دلیل وجود این دو محدودیت، درجه آزادی $\sum e_i$ برابر $n-2$ خواهد شد. به‌هرحال، $\hat{\sigma}$ انحراف معیار تخمین است و نشان می‌دهد که به‌طور متوسط $Y$های واقعی چه‌قدر از $Y$های تخمینی $(\hat{Y})$ انحراف دارد.

**مثال ۲-٤:** در مثال ۲-۲ خطای معادله رگرسیون را محاسبه کنید.

در این مثال مقادیر زیر را داریم:

$$TSS=\sum y_i^2=۴۰۹/۸$$

$$ESS=\hat{\beta}^2\sum x_i^2=(۱/۳۸)^2(۱۵۸/۸)=۳۰۲/۵۷$$

$$RSS=TSS-ESS=۴۰۹/۸-۳۰۲/۵۸=۱۰۷/۲۳$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{RSS}{n-2}=\frac{۱۰۷/۲۳}{۱۸}=۵/۹۵۷$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{۵/۹۵۷}=۲/۴۴۱$$

$\hat{\sigma}=۲/۴۴$ بیانگر آن است که انحراف $Y$ واقعی از تخمینی، به‌طور متوسط ۲/۴۴ است.

### ۲-۱۱ آزمون معنادار بودن ضرایب رگرسیون

این آزمون بیانگر این است که آیا ضرایب رگرسیون واقعاً از صفر متفاوت هستند یا خیر. با استفاده از مقادیر $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$، می‌توان این آزمون‌ها را به‌سادگی انجام داد. این آزمون برای $\beta$ به‌صورت آزمون فرضیه $H_0:\beta=0$ در مقابل فرضیه $H_1:\beta\neq 0$ می‌باشد که برای آزمون آن از توزیع $t$ استفاده می‌شود (زیرا $\hat{\beta}$ توزیع نرمال با میانگین $\beta$ و واریانس $\sigma^2/\sum x_i^2$ دارد که در صورت مجهول بودن $\sigma^2$ تبدیل به توزیع $t$ می‌شود):

$$t_{n-2}=\left.\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta})}}\right|_{H_0}=\frac{\hat{\beta}}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum x_i^2}}}=\sqrt{\sum x_i^2}\,\frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}} \qquad (۲-۲۲)$$

اگر قدرمطلق $t$ از $t$جدول بیشتر باشد، فرضیه $H_0:\beta=0$ رد می‌شود و بیانگر معنی‌دار بودن ضریب رگرسیون است. به‌طور کلی هر یک از ضرایب معادله رگرسیون در صورتی در سطح ۹۵

درصد معنی‌دار هستند که برای هر یک از آنها (به شرطی که حجم نمونه به اندازه کافی بزرگ (حدود ۳۰) باشد )، تقریباً $|t| \geq ۲$ باشد.

برای آزمون معنی‌دار بودن $\alpha$ نیز می‌توان فرضیه $H_۰ : \alpha = ۰$ را در مقابل $H_۱ : \alpha \neq ۰$ آزمون نمود که در این حالت آماره $t$ عبارت است از:

$$t_{n-۲} = \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\alpha})}}\Bigg|_{H_۰} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{۱}{n} + \frac{\bar{X}^۲}{\sum x_i^۲}}} \qquad (۲-۲۳)$$

**مثال۵-۲:** در مثال ۲-۲ آزمون معنی‌دار بودن ضرایب رگرسیون را انجام دهید.

ابتدا $\hat{\sigma}^۲$ را حساب می‌کنیم که در مثال ۴-۲ برابر با ۲/۴۴۱ به‌دست آمد. مقدار $t$ برای آزمون فرضیه $H_۰ : \beta = ۰$ برابر است با:

$$t = \sqrt{۱۵۸/۸}\,\frac{۱/۳۸}{۲/۴۴۱} = ۷/۱۲۷$$

از آنجا که مقدار $t = ۷/۱۲۷$ از $t$ جدول (در اینجا حجم نمونه $n=۲۰$ است و لذا $t$ جدول برابر با ۲/۰۹ می‌باشد) بزرگتر است و در ناحیه بحرانی قرار گرفته لذا فرضیه $\beta = ۰$ رد می‌شود و درنتیجه $\beta$ تفاوت معناداری با صفر دارد.

مقدار $t$ برای آزمون $\alpha = ۰$ عبارت است از:

$$t = \frac{۳/۲۶۶}{\sqrt{۲/۴۴۱\left(\frac{۱}{۲۰} + \frac{(۶/۴)^۲}{۱۵۸/۸}\right)}} = ۲/۴۱۱$$

چون مقدار $t = ۲/۴۱$ از $t$ جدول یعنی ۲/۰۹ بزرگتر است و در ناحیه بحرانی قرار گرفته است، لذا فرضیه $\alpha = ۰$ رد می‌شود و در نتیجه، $\alpha$ تفاوت معناداری با صفر دارد.

این آزمون‌ها را می‌توان برای فرضیه‌هایی مانند $\beta = ۱$ یا $\beta = ۵$ و غیره نیز انجام داد. مراحل انجام این آزمون‌ها تفاوتی با آزمون فرضیه $\beta = ۰$ ندارد.

**مثال ۶-۲:** در مثال ۲-۲ آیا $\beta$ می‌تواند برابر با ۱ باشد؟

در اینجا فرضیه $\beta = ۱$ را در مقابل $\beta \neq ۱$ آزمون می‌کنیم. مقدار $t$ برابر است با:

$$t = \sqrt{۱۵۸/۸}\,\frac{۱/۳۸ - ۱}{۲/۴۴۱} = ۱/۹۶$$

چون مقدار $t$ در ناحیه بحرانی قرار نگرفته است لذا فرضیه $\beta = ۱$ رد نمی‌شود. بنابراین $\beta$ تفاوت معناداری با ۱ ندارد.

برای ضرایب $\alpha$ و $\beta$ می‌توان فاصله اطمینان نیز تشکیل داد که با استفاده از آماره $t$ به‌دست می‌آید. برای آزمون فرضیه در مورد $\beta$، ناحیه قبول فرضیه $H_0$ به‌صورت زیر است:

$$|t| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \Rightarrow \left|\frac{\hat{\beta}-\beta}{\hat{\sigma}/\sqrt{\sum x_i^2}}\right| \le t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$$

با ساده کردن این نامساوی، می‌توان تخمین فاصله‌ای را برای $\beta$ و مشابه آن را برای $\alpha$ به‌دست آورد:

$$\left(\hat{\beta}-t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum x_i^2}} \le \beta \le \hat{\beta}+t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum x_i^2}}\right)$$

(۲-۲۴)

$$\left(\hat{\alpha}-t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2}} \le \alpha \le \hat{\alpha}+t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\,\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{X^2}{\sum x_i^2}}\right)$$

**مثال۲-۲:** تخمین فاصله‌ای ۹۵ درصد را برای $\beta$ در مثال ۲-۲ به‌دست آورید.

محاسبات لازم برای تعیین فاصله اطمینان، در مثال ۲-۲ تا ۲-۵ انجام شده است که عبارتند از:

$$\hat{\beta} = 1/38 \qquad \sum x_i^2 = 158/8$$

$$\hat{\sigma}^2 = 5/957 \qquad n = 20$$

با توجه به $t_{0/025,18} = 2/1$ و انجام محاسبات لازم، تخمین فاصله‌ای برای $\beta$ عبارت است از:

$$(0/978\ ,\ 1/782)$$

بنابراین با احتمال ۹۵ درصد $\beta$ در این فاصله قرار دارد.

## ۲-۱۲ تحلیل واریانس (آزمون معنادار بودن رگرسیون)

تحلیل واریانس روش دیگری برای بررسی وضعیت مدل رگرسیون است. در تحلیل واریانس، عوامل مؤثر بر $Y$ به دو دسته تقسیم می‌شوند. یکی ناشی از $X$ (جزء غیرتصادفی یا قابل کنترل) که برابر با $\alpha+\beta X$ است و دیگری ناشی از اثر سایر عوامل یعنی $u$ (جزء تصادفی یا غیر قابل کنترل) می‌باشد. حال سؤال این است که آیا اثرات ناشی از $X$ یا عاملی که قابل کنترل است در

مقایسه با سایر عوامل یعنی $u$ در خور توجه است یا خیر. این سؤال معادل با این است که اگر $\beta = ۰$ باشد، بدان معنا است که $X$ بی‌تأثیر است و تغییرات $Y$ عملاً ناشی از تغییرات تصادفی است. لذا بحث فوق معادل است با آزمون این فرضیه که آیا $\beta$ تفاوت معناداری با صفر دارد یا خیر.[۱]

همان‌طور که اشاره شد، کل تغییرات $Y$ برابر با «تغییرات توضیح داده شده» به‌علاوهٔ «تغییرات توضیح داده نشده» می‌باشد که اولی ناشی از $X$ و دومی ناشی از $u$ است:

$$TSS=ESS+RSS$$

$$\sum(Y_i-\bar{Y})^۲=\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^۲+\sum e_i^۲ \qquad (۲-۲۵)$$

اما هر یک از جملات رابطه (۲-۲۵) را می‌توان برحسب توزیع $\chi^۲$ نوشت. زیرا شامل متغیرهایی هستند که دارای توزیع نرمال بوده ($Y_i$ و $\hat{Y}_i$ هر کدام توزیع نرمال دارند، زیرا تابع خطی از $u_i$ هستند) و به‌صورت مجذور نیز بیان شده‌اند.

$$TSS=\sum y_i^۲ \quad , \quad ESS=\sum \hat{y}_i^۲ \quad , \quad RSS=\sum e_i^۲=\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^۲$$

$TSS$ شامل $n$ متغیر $Y_i$ می‌باشد. اما به‌دلیل محدودیت $\sum(Y_i-\bar{Y})=۰$ درجه آزادی آن $n-۱$ می‌باشد. $ESS$ تابعی از $\hat{Y}_i$ است که آن نیز فقط تابعی از دو متغیر تصادفی $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ است و به‌دلیل اینکه $\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}$ است لذا درجه آزادی آن برابر با ۱ خواهد شد. $RSS$ نیز تابعی از $n$ متغیر تصادفی $e_i$ است. اما چون دو محدودیت به‌صورت $\sum e_i=۰$ و $\sum e_i X_i=۰$ دارد، لذا درجه آزادی آن $n-۲$ است.

حال می‌توان $ESS$ (یعنی اثر $X$) را با $RSS$ (اثر سایر عوامل یا $u$) مقایسه نمود. بدین منظور ابتدا میانگین آنها را محاسبه کرده و سپس از نسبت آنها، تابع $F$ را تعریف می‌کنیم[۲]:

---

۱- در فصل سوم خواهیم دید که در رگرسیون چند متغیره، آزمون معنادار بودن رگرسیون با آزمون معنی‌دار بودن ضریب $\beta$، متفاوت است.

[2] توجه شود که طبق رابطه (۳۰-۱) در فصل اول، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{TSS}{\sigma^۲}=\frac{\sum y_i^۲}{\sigma^۲}=\chi^۲_{n-۱} \quad , \quad \frac{ESS}{\sigma^۲}=\frac{\sum \hat{y}_i^۲}{\sigma^۲}=\chi^۲_۱ \quad , \quad \frac{RSS}{\sigma^۲}=\frac{\sum e_i^۲}{\sigma^۲}=\chi^۲_{n-۲}$$

$$S_E^2 = \frac{ESS}{1} \quad , \quad S_R^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-2} = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

$$F_{1,n-2} = \frac{\frac{\chi_1^2}{1}}{\frac{\chi_{n-2}^2}{n-2}} = \frac{\frac{\sigma^2\chi_1^2}{1}}{\frac{\sigma^2\chi_{n-2}^2}{n-2}} = \frac{S_E^2}{S_R^2} = \frac{ESS}{\frac{RSS}{n-2}} = (n-2)\frac{ESS}{RSS} \qquad (۲-۲۶)$$

بدیهی است که اگر مقدار $F$ بزرگ باشد، نشان می‌دهد که معادله رگرسیون توانسته است بخوبی تغییرات $Y$ را توضیح دهد و از نظر آماری معنادار است، زیرا بزرگ بودن $F$ بدین معنی است که تأثیر $X$ در مقایسه با سایر عوامل $(u)$ درخور توجه است.

از طرف دیگر می‌توان $F$ را بر حسب $R^2$ نیز بیان نمود:

$$\begin{aligned} F &= (n-2)\frac{ESS}{RSS} = (n-2)\frac{ESS}{TSS-ESS} \\ &= (n-2)\frac{ESS/TSS}{1-ESS/TSS} = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2} \end{aligned} \qquad (۲-۲۷)$$

بنابراین هر چقدر $R^2$ بیشتر باشد، مقدار $F$ نیز بیشتر خواهد شد. به هر حال مزیت آزمون $F$ در این است که با استفاده از آن می‌توان معنادار بودن رگرسیون‌های چندمتغیره را نیز آزمون نمود.[1]

مثال ۱۰-۲: در مثال ۲-۲ آیا رگرسیون $Y$ روی $X$ معنادار است یا خیر.

چون $ESS = ۱۵/۵۵۸$ و $TSS = ۲۴/۸۳۳$ لذا $RSS = ۲۴/۸۳۳ - ۱۵/۵۵۸ = ۹/۲۷۵$

است. بر این اساس مقدار $F$ برابر است با:

$$F = (n-2)\frac{ESS}{RSS} = (۲۰-۲)\frac{۳۰۲/۵۷}{۱۰۷/۲۳} = ۵۰/۷۹$$

$$\left(F \geq_{\alpha,1,n-2} = F_{./۰۵,۱,۱۸} = ۸/۲۹\right)$$

چون $F = ۵۰/۷۹$ از $F$ جدول (۸/۲۹) بزرگتر است، لذا فرضیه $H_0$ رد می‌شود.

به‌عبارت دیگر $X$ توانسته است به‌طور معناداری تغییرات $Y$ را توضیح دهد.

---

[1] توجه شود که در رگرسیون یک متغیره، چون درجه آزادی صورت $F$ برابر با ۱ است، لذا $F$ برابر بامجذور $t$ در آزمون فرضیه $H_0: \beta = ۰$ است.

## ۲-۱۳ جمع‌بندی و تحلیل نتایج رگرسیون

در تحلیل رگرسیون، متناسب با موضوع مورد نظر، ابتدا معادله را انتخاب می‌کنیم که ممکن است خطی یا غیرخطی باشد. سپس ضرایب آن را با روش حداقل مربعات معمولی (OLS) برآورد می‌کنیم. برای این معادله، معیارهایی از قبیل معنی‌دار بودن ضرایب، ضریب تعیین و مقدار $F$ محاسبه می‌شوند که همراه با هر معادلهٔ رگرسیون، ارائه می‌گردند. در مثال زیر، این معیارها و تفسیر مختصر آنها ارائه شده است.

مثال ۱۱-۲: نتایج حاصل از مثال ۲-۲ به‌طور خلاصه عبارت است از:

$$\hat{Y}_i = ۳/۲۶۶ + ۱/۳۸X_i \qquad R^۲ = ۰/۷۳۸$$
$$(۲/۴) \quad (۷/۱) \qquad F = ۵۰/۷۹$$

$R^۲$ بیانگر این است که معادلهٔ تخمینی توانسته است حدود ۷۳/۸ درصد از تغییرات متغیر وابسته $(Y)$ را توضیح دهد ولی ۲۶/۲ درصد از تغییرات $Y$ ناشی از عوامل تصادفی است که این معادله نتوانسته آنها را به حساب آورد. به‌عبارت دیگر، ۷۳/۸ درصد از تغییرات $Y$ توسط $X$ توضیح داده می‌شود و بقیه تغییرات آن ناشی از سایر عوامل است که در داخل $u$ قرار دارند. مقدار $F$ نیز نشان می‌دهد که این معادله کاملاً معنی‌دار است زیرا از $F$ جدول بیشتر می‌باشد.

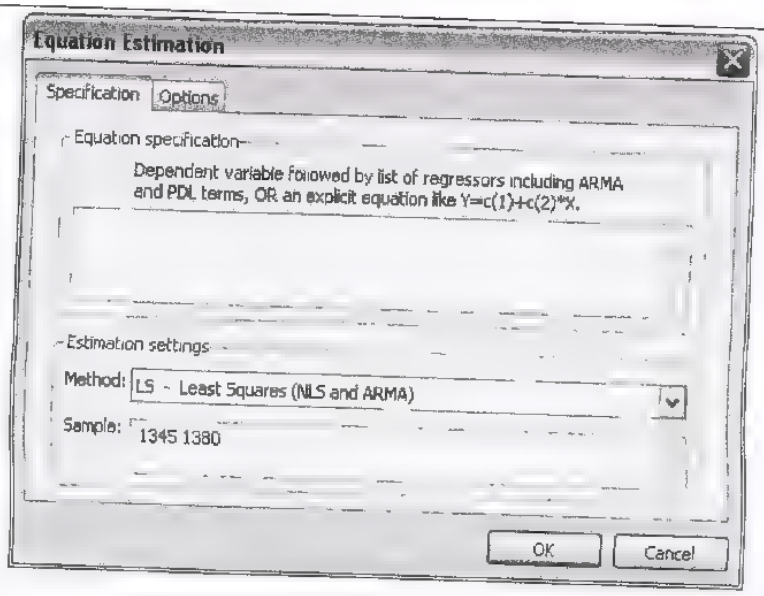
ارقام داخل پرانتز بیانگر مقدار $t$ برای هر یک از این ضرایب می‌باشد که وضعیت معنی‌دار بودن آنها را نشان می‌دهد. مقدار $t$ برای $\beta$ بیشتر از ۲ است، لذا معنی‌دار می‌باشد (به‌عبارت دیگر به‌طور معنی‌داری از صفر تفاوت دارد). همچنین چون مقدار $t$ برای $\alpha$ بیشتر از ۲ است، لذا معنی‌دار بوده و با صفر تفاوت دارد.

**برآورد رگرسیون ساده با Eviews**

فایل data1

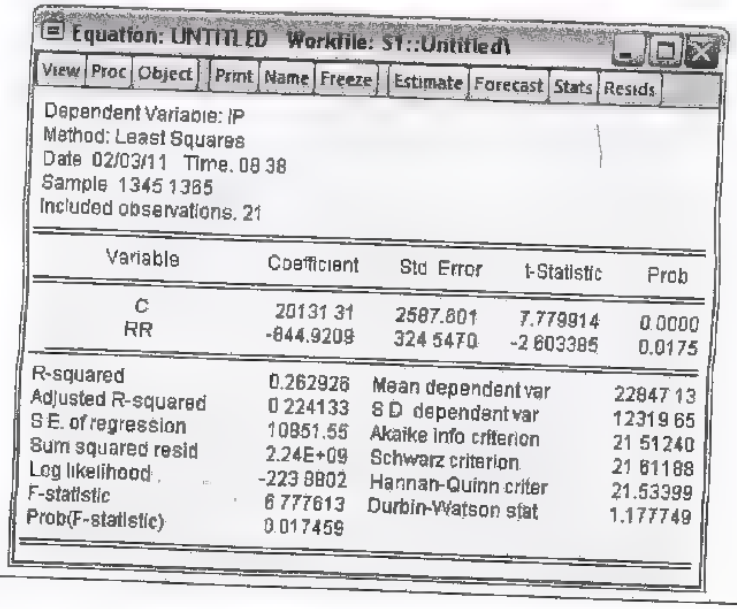
برای برآورد معادله رگرسیون، به دو صورت می‌توان عمل نمود. یک روش این است که در سطر فرمان با فرمان LS معادله مورد نظر را به‌صورت LS Y C X وارد نماییم. LS فرمان اجرای روش حداقل مربعات معمولی است. در اینجا Y متغیر وابسته، C عرض از مبدأ و X متغیر توضیحی را نشان می‌دهد. بعد از وارد نمودن عبارت مذکور با زدن کلید Enter نتایج تخمین در پنجره Equation ارائه می‌شود.

همچنین می‌توان از منوی Quick گزینه Estimation Equation را انتخاب نمود که به‌دنبال آن پنجره زیر باز می‌شود:




در اینجا معادله مورد نظر را به‌صورت Y C X و یا به صورت Y -C(1)+C(2)*X وارد نموده و OK را انتخاب می‌کنیم. در قسمت پایین این پنجره، روش‌های تخمین نیز مشخص شده است که در گزینه Method قرار دارند. گزینه Sample نیز بیانگر دوره‌ای است که می‌خواهیم معادله را برای آن دوره برآورد نماییم.

به‌عنوان نمونه، نتایج تخمین معادله سرمایه‌گذاری بخش خصوصی به قیمت ثابت (IP) روی نرخ بهره حقیقی (RR) برای دوره ۶۵-۱۳۴۵ به‌صورت زیر می‌باشد.



Equation: UNTITLED Workfile: S1::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date 02/03/11 Time. 08 38
Sample 1345 1365
Included observations. 21

| Variable | Coefficient | Std Error | t-Statistic | Prob |
|---|---|---|---|---|
| C | 20131 31 | 2587.801 | 7.779914 | 0.0000 |
| RR | -844.9209 | 324 5470 | -2 603385 | 0.0175 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.262926 | Mean dependent var | 22847 13 |
| Adjusted R-squared | 0 224133 | S D dependent var | 12319 65 |
| S E. of regression | 10851.55 | Akaike info criterion | 21 51240 |
| Sum squared resid | 2.24E+09 | Schwarz criterion | 21 61188 |
| Log likelihood | -223 8802 | Hannan-Quinn criter | 21.53399 |
| F-statistic | 6 777613 | Durbin-Watson stat | 1.177749 |
| Prob(F-statistic) | 0 017459 | | |

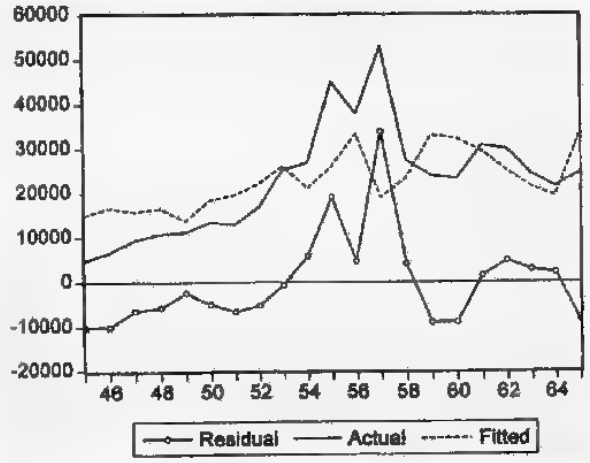
همان‌طور که ملاحظه می‌شود در بالای این جدول، نام متغیر وابسته مشخص شده است. سپس روش تخمین با عبارت Least Squares نشان داده شده است. در سطر بعدی، زمان انجام این تخمین و سپس دوره زمانی در مقابل Sample ارائه شده است. تعداد مشاهدات نیز مشخص شده که برابر با ۲۱ می‌باشد.

در قسمت بعد ابتدا ستون Variable را داریم که در این ستون نام متغیرهای توضیحی ارائه می‌شود. C بیانگر عرض از مبدأ و RR نیز نرخ بهره حقیقی است. در ستون دوم که تحت عنوان Coefficient است مقدار ضرایب را نشان می‌دهد که مقدار عرض از مبدأ ۲۰۱۳۱/۳۱ و ضریب نرخ بهره یا شیب معادله رگرسیون برابر با ۸۴۴/۹- می‌باشد. در ستون بعدی، انحراف معیار تخمین‌زننده‌ها (Std. Error) ارائه شده است. همچنین از تقسیم مقدار هر ضریب بر انحراف معیار آن، مقدار آماره t به‌دست می‌آید که در ستـــون t-Statistic ارائه شده است. چون قدرمطلق t برای هر یک از ضرایب بیشتر از ۲ است لذا هر دو ضریب معنی‌دار هستند. در ستون آخر یعنی Prob. سطح معنی‌دار بودن ضرایب را نشان می‌دهد که اگر کمتر از ۰/۰۵ باشد بدین معنی است که ضرایب، لااقل در سطح ۰/۰۵ معنی‌دار هستند.

در قسمت پایین جدول، مقدار ضریب تعیین ($R^2$) با R-Squared و مقدار F نیز با F-Statistic مشخص شده‌اند. در این مثال $R^2$ =۰/۳۶۳ و F=۷/۷۸ می‌باشد. همچنین در زیر تابع F سطح معنی‌دار بودن F (یا معنی‌دار بودن معادله رگرسیون) ارائه شده است که در اینجا ۰/۰۱۷ می‌باشد. به‌طور کلی اگر این احتمال از ۰/۰۵ کمتر باشد، بدین معنی است که معادله رگرسیون معنادار است.

همچنین عبارت Mean dependent var بیانگر میانگین متغیر وابسته و S.D. dependent var نیز بیانگر انحراف معیار متغیر وابسته است. علاوه بر این، S.E. of regresion نیز انحراف معیار معادله رگرسیون یعنی $\hat{\sigma}$ می‌باشد. مجموع مجذور خطاها یا RSS نیز با Sum squared resid نشان داده شده است. راجع به بقیه ارقامی که در جدول مذکور ارائه شده است در ادامه و به‌ویژه در فصل‌های بعدی بحث خواهد شد.

در پنجره Equation که نتایج معادله رگرسیون را نشان می‌دهد، منوهای مختلفی وجود دارد که هر کدام کارکردهای خاص خود را دارند. به‌عنوان مثال در منوی View با انتخاب Actual, Fitted, Residual می‌توان نمودار و جدول مقادیر واقعی متغیر وابسته (Actual)، مقادیر برآوردی (Fitted) و باقیمانده‌ها (Residual) را به‌دست آورد. برای تابع سرمایه‌گذاری نمودار زیر به‌دست آمده است.




همچنین در منوی View گزینه‌های دیگری جهت انجام آزمون‌های مختلف وجود دارد که در قسمت‌های بعدی به آنها اشاره خواهد شد.

### ۱۴-۲ پیش‌بینی و فاصله اطمینانِ پیش‌بینی

پیش‌بینی یکی از ابزارهای مهم برای تصمیم‌گیرهای اقتصادی و مالی است و لذا یکی از مهمترین اهداف مدل‌های اقتصاد سنجی می‌باشد. دقت این پیش‌بینی‌ها می‌تواند منجر به تصمیمات بهتر و دقیق‌تر شود و منافع آنها را بیشتر نماید.

پیش‌بینی‌ها را می‌توان بر اساس دوره زمانی، به دو دسته تقسیم نمود: پیش‌بینی درون‌نمونه‌ای و پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای. پیش‌بینی درون‌نمونه‌ای مربوط به دوره‌ای است که مدل را برای همان دوره برآورد نموده‌ایم. به‌عنوان مثال اگر مدل برای دوره ۸۰-۱۳۵۰ برآورد شده باشد، در این صورت پیش‌بینی درون‌نمونه‌ای نیز برای دوره ۸۰-۱۳۵۰ انجام می‌شود. معمولاً نتایج پیش‌بینی درون‌نمونه‌ای نسبتاً خوب هستند. این نوع پیش‌بینی معمولاً برای بررسی دقت مدل می‌باشد، زیرا می‌توان مقادیر پیش‌بینی را با مقادیر واقعی مقایسه نمود.

پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای، برای دورهٔ بعد از برآورد مدل می‌باشد. مثلاً اگر دورهٔ برآورد شامل ۸۰-۱۳۵۰ است، دورهٔ بعد از آن می‌تواند شامل ۸۵-۱۳۸۱ یا ۹۵-۱۳۸۱ باشد. اگر در پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای، دورهٔ پیش‌بینی مربوط به گذشته باشد در این صورت امکان مقایسه مقادیر پیش‌بینی با مقادیر واقعی وجود دارد. ولی اگر مربوط به دوره آینده باشد امکان مقایسه وجود ندارد، زیرا مقادیر واقعی هنوز تحقق نیافته‌اند.

برای تعیین دقت پیش‌بینی، معیارهای مختلفی وجود دارد که در فصل یازدهم ارائه شده است.

با استفاده از معادله رگرسیون می‌توان مقادیر $Y$ را پیش‌بینی نمود. تخمین مقدار پیش‌بینی‌شدهٔ $Y$ را با $\hat{Y}_f$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر اگر مقدار $X$ در سال $f$ برابر با $X_f$ باشد آنگاه پیش‌بینی ما از $Y$ برابر با $\hat{Y}_f$ است:

$$\hat{Y}_f = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_f$$

اما مقدار دقیق $Y$ در سال $f$ برابر خواهد بود با:

$$Y_f = \hat{Y}_f + e_f$$

$e_f$ مقدار خطای پیش‌بینی است. در اینجا نیز برای ساختن تخمین فاصله‌ای برای $Y_f$، ابتدا امید ریاضی و واریانس خطای پیش‌بینی را محاسبه می‌کنیم:

$$e_f = Y_f - \hat{Y}_f \quad ; Y_f = \alpha + \beta X_f + u_f \quad , \quad \hat{Y}_f = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_f \tag{۲-۲۸}$$

توجه شود که خطای واقعیِ پیش‌بینی برابر با $u_f$ است که تخمین آن برابر با $e_f$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(e_f) &= \mathrm{var}(Y_f - \hat{Y}_f) \\ &= \mathrm{var}(Y_f) + \mathrm{var}(\hat{Y}_f) - ۲\mathrm{cov}(Y_f, \hat{Y}_f) = \mathrm{var}(Y_f) + \mathrm{var}(\hat{Y}_f) \end{aligned} \tag{۲-۲۹}$$

$Y_f$ و $\hat{Y}_f$ مستقل از هم هستند، زیرا $Y_f$ تابعی از $u_f$ است اما $\hat{Y}_f$ تابعی از $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ بوده که این دو نیز تابعی از $u_i$ هستند. چون طبق فرض «عدم خودهمبستگی»، $u_i$ و $u_f$ مستقل از هم هستند، لذا باعث می‌شود که $Y_f$ و $\hat{Y}_f$ نیز مستقل از هم باشند و کوواریانس آنها صفر گردد:

$$\mathrm{var}(e_f) = \mathrm{var}(Y_f) + \mathrm{var}(\hat{Y}_f) = \mathrm{var}(u_f) + \mathrm{var}(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_f)$$

زیرا طبق (۲-۲۸)، $\mathrm{var}(Y_f) = \mathrm{var}(u_f) = \sigma^۲$ است. با محاسبه $\mathrm{var}(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_f)$ خواهیم داشت:[1]

$$\mathrm{var}(e_f) = \sigma^۲ + \sigma^۲\left(\frac{۱}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^۲}{\sum x_i^۲}\right) = \sigma^۲\left(۱ + \frac{۱}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^۲}{\sum x_i^۲}\right) \tag{۲-۳۰}$$

حال تابع $t$ را تشکیل می‌دهیم:

$$t_{n-۲} = \frac{e_f - E(e_f)}{\sqrt{\mathrm{var}(e_f)}} = \frac{e_f - ۰}{\sqrt{\mathrm{var}(e_f)}} = \frac{Y_f - \hat{Y}_f}{\sqrt{\mathrm{var}(e_f)}}$$

با استفاده از شرط $|t| \le t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۲}$، تخمین فاصله‌ای برای $Y_f$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\left(\hat{Y}_f - t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۲}\sqrt{\mathrm{var}(e_f)} \le Y_f \le \hat{Y}_f + t_{\frac{\alpha}{۲}, n-۲}\sqrt{\mathrm{var}(e_f)}\right) \\ &\mathrm{var}(e_f) = \hat{\sigma}^۲\left(۱ + \frac{۱}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^۲}{\sum x_i^۲}\right) \end{aligned} \tag{۲-۳۱}$$

---

[1] برای محاسبهٔ واریانس $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_f$، ابتدا به‌جای $\hat{\alpha}$ قرار داده و سپس آن را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_f) &= \mathrm{var}(\bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} + \hat{\beta} X_f) = \mathrm{var}[\bar{Y} + \hat{\beta}(X_f - \bar{X})] \\ &= \mathrm{var}(\bar{Y}) + (X_f - \bar{X})^۲ \mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^۲}{n} + \frac{(X_f - \bar{X})^۲ \sigma^۲}{\sum (X_i - \bar{X})^۲} \end{aligned}$$

**مثال ۱۳-۲:** در مثال ۱۲-۲ اگر مقدار $X_f = ۱۰$ باشد، مقدار پیش‌بینی شدهٔ $Y_f$ را محاسبه کرده و تخمین فاصله را برای آن به‌دست آورید.

مقدار پیش‌بینی شدهٔ $Y_f$ برابر با $\hat{Y}_f$ است:

$$\hat{Y}_f = ۳/۲۶۶ + ۱/۳۸(۱۰) = ۱۷/۰۶۶$$

و با توجه به محاسبات قبلی، تخمین فاصله‌ای به‌ازای $X_f = ۸$ برابر است با:

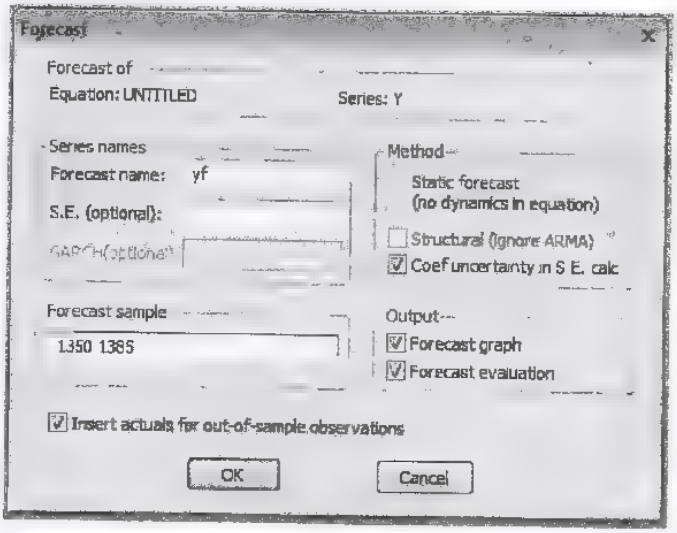
$$۱۷/۰۶۶ \pm (۲/۱)(۲/۴۴۱)\sqrt{۱ + \frac{۱}{۲۰} + \frac{(۱۰ - ۶/۴)^۲}{۱۵۸/۸}}$$

$$\Rightarrow \quad ۱۷/۰۶۶ \pm ۵/۴۵۳ \quad \Rightarrow \quad (۱۱/۶۱۳ \ , \ ۲۲/۵۱۹)$$

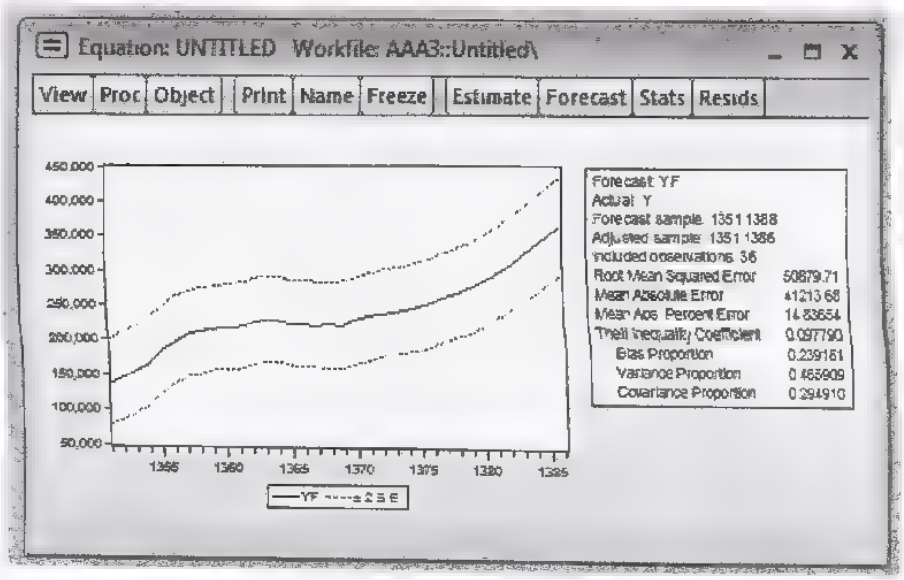
بدین ترتیب با احتمال ۹۵ درصد، مقدار $Y_f$ در فاصله مذکور قرار خواهد داشت.

**پیش‌بینی با Eviews**

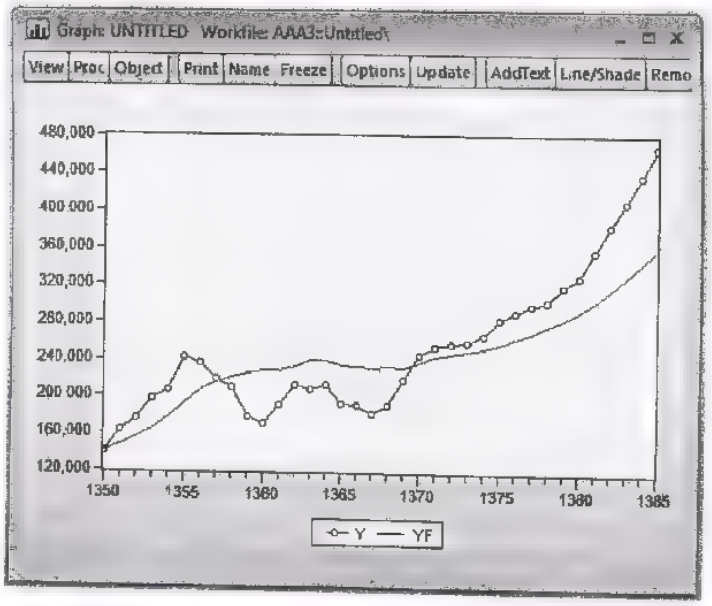
برای انجام پیش‌بینی با Eviews فرض کنید دوره زمانی شامل ۸۵-۱۳۵۰باشد. ابتدا معادله مورد نظر را برای یک دوره دلخواه مانند ۸۰-۱۳۵۰، برآورد می‌کنیم. سپس در پنجرهٔ نتایج، با انتخاب Proc → Forecast پنجره زیر را باز می‌کنیم:




در قسمت Forecast name نامی را برای مقادیر پیش‌بینی شدهٔ متغیر وابسته انتخاب می‌کنیم. نرم‌افزار Eviews به آخر نام متغیر وابسته، حرف f را اضافه می‌کند (مانند Yf). همچنین در قسمت Forecast sample دورهٔ پیش‌بینی را وارد می‌کنیم (مثلاً ۸۵-۱۳۵۰). با انتخاب OK مقادیر پیش‌بینی شدهٔ y همراه با مرزهای آن (به‌اضافه و منهای دو انحراف معیار) ارائه می‌شود. در سمت راست آن اطلاعات دیگری نیز ارائه می‌شود که در فصل یازدهم در مورد آنها توضیح داده شده است.




همچنین می‌توان با فرمان plot Y Yf مقادیر واقعی و پیش‌بینی را در یک نمودار ترسیم کرده و مقایسه نمود. البته می‌توان برای دورهٔ بعد از ۱۳۸۵، مثلاً تا ۱۳۹۰ نیز پیش‌بینی را انجام داد. در این حالت باید Range را تا ۱۳۹۰ گسترش دهیم. از طرف دیگر چون مقادیر X را برای سالهای ۱۳۸۶ تا ۱۳۹۰ نداریم، لذا بایستی مقادیر آن را به‌طور دلخواه یا در قالب سناریوهای مختلف تعیین کرده و سپس Y را تا ۱۳۹۰ پیش‌بینی نمود.



## ۲-۱۵ رگرسیون‌های غیرخطی

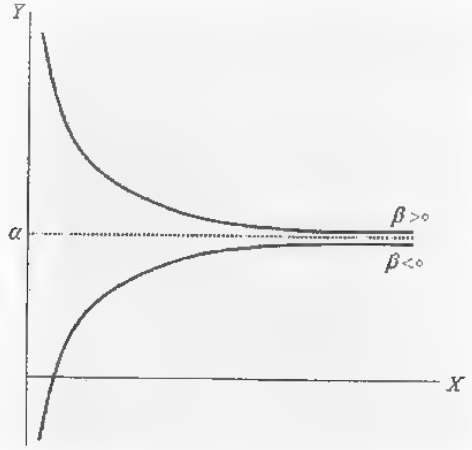
تاکنون معادله رگرسیون خطی را به‌صورت $Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$ در نظر گرفتیم. اما ممکن است رابطه $X$ و $Y$ غیرخطی باشد. در اینجا انواع خاصی از رگرسیون‌های غیرخطی را بررسی می‌کنیم که امکان تبدیل آنها به یک رابطه خطی وجود دارد تا امکان استفاده از روش OLS فراهم شود.

### ۲-۱۵-۱ روابط معکوس

روابط معکوس در مواردی وجود دارد که با افزایش $X$ مقدار $Y$ به سمت یک مقدار معین میل می‌کند. یکی از توابعی که می‌تواند چنین وضعیتی را نشان دهد عبارت است از:

$$Y_i=\alpha+\frac{\beta}{X_i} \qquad (۲-۳۷)$$

نزولی یا صعودی بودن این رابطه، بستگی به علامت $\beta$ دارد که نمودار زیر آن را نشان می‌دهد.




نمودار ۲-۷: روابط معکوس

برای برآورد این معادله می‌توان آن را به‌صورت خطی نوشت:

$$Y_i=\alpha+\beta X_i^* \ , \ X_i^*=\frac{۱}{X_i}$$

اثر تغییر $X$ بر $Y$ عبارت است از:

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{\beta}{X^۲}$$

اگر اثر تغییر $X$ بر $Y$ را بر حسب درصد بیان کنیم بیانگر کشش $Y$ نسبت‌به $X$ است که نشان می‌دهد یک درصد تغییر در $X$ چند درصد $Y$ را تغییر می‌دهد:

$$\eta=\frac{dy}{dx}\frac{X}{Y}=(-\frac{\beta}{X^{۲}})\frac{X}{Y}=-\frac{\beta}{XY}$$

برای محاسبه $\eta$ معمولاً از میانگین‌های $X$ و $Y$ استفاده می‌شود.

$$\eta=-\frac{\beta}{\overline{XY}}$$

**برآورد روابط معکوس با Eviews**

بدین منظور می‌توان معادله $Y_i=\alpha+\frac{\beta}{X_i}$ را با فرمان زیر برآورد کرد:

LS Y C 1/X

و یا می‌توان ابتدا با فرمان genr z=1/x متغیر z را حساب کرده و سپس با فرمان LS Y C Z معادله را برآورد نمود.

### ۲-۱۵-۲ معادلات تمام لگاریتمی (log-log)

فرض کنید معادله رگرسیون به‌صورت زیر باشد:

$$Y_i=aX_i^{\beta}e^{u_i} \qquad (۲-۳۸)$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین معادله فوق، خواهیم داشت:

$$\ln Y_i=\alpha+\beta\ln X_i+u_i \ , \ \alpha=\ln a \qquad (۲-۳۹)$$

معادله فوق شبیه یک معادله خطی است و لذا با روش OLS قابل برآورد است. اثر متغیر $X$ بر $Y$ به‌صورت زیر حساب می‌شود.

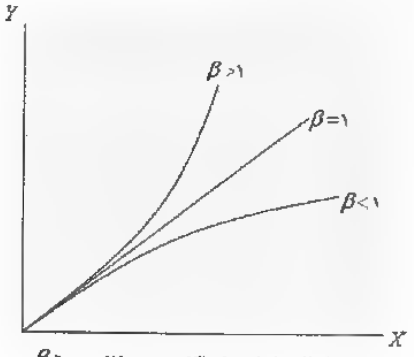
$$\eta=\frac{d\ln Y}{d\ln X}=\frac{dY/Y}{dX/X}=\frac{dY}{dX}\frac{X}{Y}=\beta$$

بنابراین $\beta$ برابر با کشش $Y$ نسبت‌به $X$ است. برای محاسبه $\frac{dY}{dX}$، رابطه فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{dY}{dX}=\beta\frac{Y}{X}$$

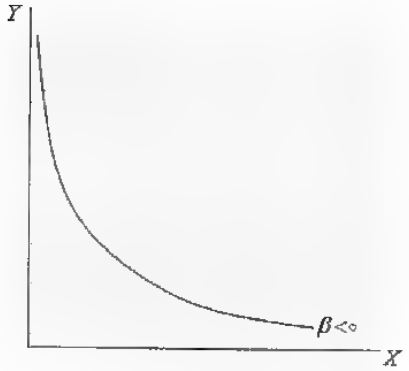
در اینجا نیز برای محاسبه اثر $X$ بر $Y$ معمولاً از میانگین‌های $X$ و $Y$ استفاده می‌شود.

بدیهی است که معادله $Y=ax^{\beta}$ کاملاً انعطاف‌پذیر است. به‌عنوان مثال اگر $\alpha$ و $\beta$ مثبت باشند، نمودار زیر، رابطه $X$ و $Y$ را توصیف می‌کند.




نمودار ۸-۲: معادله تمام لگاریتمی به‌ازای $\beta>0$

اگر $\beta<0$ باشد، خواهیم داشت:




نمودار ۹-۲: معادله تمام لگاریتمی به‌ازای $\beta<0$

**برآورد معادله لگاریتمی با Eviews**

بدین منظور فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

LS ln(Y) C ln(X)

که C مقدار $\alpha$ یا $\ln a$ و ضریب ln(X) نیز برابر با $\beta$ است. بدیهی است که برای تعیین $\alpha$ از رابطه $\ln a=\alpha$ یا $a=e^{\alpha}$ استفاده می‌کنیم.

همچنین می‌توان ابتدا با فرمان genr متغیرهای LY=ln(Y) و LX=ln(X) را محاسبه کرده و سپس معادله رگرسیون لگاریتمی را با فرمان زیر برآورد نمود:

LS LY C LX

### ۲-۱۵-۳ توابع نمایی

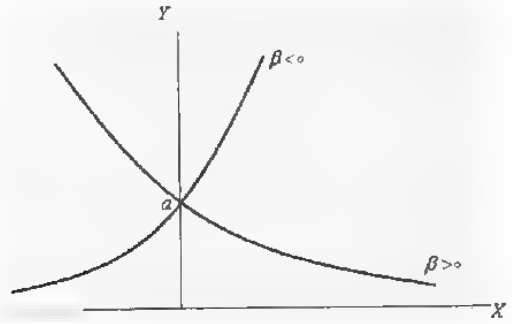
اگر رابطه $Y$ و $X$ توسط یک تابع نمایی توصیف شود، شکل کلی آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$Y_i = ae^{\beta X_i + u_i} = ae^{\beta X_i} e^{u_i} \qquad (۲-۴۰)$$

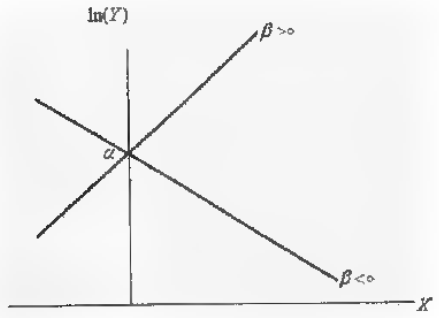
با گرفتن لگاریتم خواهیم داشت:

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \ , \ \alpha = \ln a$$

معادله فوق را log-lin می‌گویند که به معنی لگاریتمی– خطی است، زیرا نسبت‌به $Y$ لگاریتمی و نسبت‌به $X$ خطی است.




نمودار ۱۰-۲: معادله لگاریتمی– خطی




نمودار ۱۱-۲: معادله لگاریتمی– خطی

اثر تغییرات $X$ بر $Y$ برابر است با:

$$\frac{d\ln Y}{dX} = \beta \Rightarrow \frac{dY/Y}{dX} = \beta \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \beta Y$$

و کشش $Y$ نسبت‌به $X$ برابر است با:

$$\eta = \frac{dY}{dX}\frac{X}{Y} = \beta Y \frac{X}{Y} = \beta X$$

**برآورد تابع نمایی با Eviews**

معادله log-lin را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

LS ln(Y) C X

C برآورد $\alpha$ و ضریب X برآورد $\beta$ را نشان می‌دهند. برای محاسبه $a$ از رابطه $\ln a=\alpha$ یا $a=e^{\alpha}$ استفاده می‌کنیم.

### ۲-۱۵-٤ رگرسیون انحراف از میانگین

معادله رگرسیون خطی به‌صورت زیر است:

$$Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i \qquad (۲-۴۱)$$

معادله فوق را جمع زده و بر $n$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sum Y_i}{n}=\frac{\sum(\alpha+\beta X_i+u_i)}{n}$$

$$\bar{Y}=\frac{n\alpha+\beta\sum X_i+\sum u_i}{n}\Rightarrow\bar{Y}=\alpha+\beta\bar{X}+\bar{u} \qquad (۲-۴۲)$$

معادله (۲-۴۱) را منهای معادله (۲-۴۲) می‌کنیم:

$$Y_i-\bar{Y}=\beta(X_i-\bar{X})+(u_i-\bar{u})$$

انحراف از میانگین را با $Y_i-\bar{Y}=y_i$، $X_i-\bar{X}=x_i$ و $u_i-\bar{u}=v_i$ نشان می‌دهیم:

$$y_i=\beta x_i+v_i \qquad (۲-۴۳)$$

بنابراین، اگر داده‌ها را بر حسب انحراف از میانگین بنویسیم، عرض از مبدأ حذف می‌شود، ولی شیب معادله تغییری نمی‌کند. زیرا در رگرسیون $Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$ که تخمین آن به‌صورت $\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_i$ است، خطای تخمین برابر است با:

$$\begin{aligned}e_i&=Y_i-\hat{Y}_i=\hat{Y}_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_i\\&=Y_i-(\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X})-\hat{\beta}X_i\ ;\ \hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}\\&=(Y_i-\bar{Y})-\beta(X_i-\bar{X})=y_i-\hat{\beta}x_i\end{aligned} \qquad (۲-۴۴)$$

بنابراین با حداقل نمودن مجموع مجذور خطاها، $\hat{\beta}$ به‌دست می‌آید:

$$\sum e_i^2=\sum(y_i-\hat{\beta}x_i)^2$$

$$\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial\hat{\beta}}=2\sum(y_i-\hat{\beta}x_i)(-x_i)=0\Rightarrow\hat{\beta}=\frac{\sum x_iy_i}{\sum x_i^2} \qquad (۲-۴۵)$$

بنابراین، تخمین شیب معادله رگرسیون، مشابه قبل است.

**برآورد رگرسیون انحراف از میانگین با Eviews**

رگرسیون انحراف از میانگین را فرمان زیر برآورد می کنیم:

LS Y-@mean(Y) X-@mean(X)

چون عرض از مبدأ این معادله برابر صفر است، لذا حرف C را ننوشته‌ایم. ضریب X-@mean(X) برابر با تخمین $\beta$ است.

### ۵-۱۵-۲ رگرسیون با متغیرهای استاندارد شده

مقادیر استاندارد شدهٔ $X$ و $Y$ عبارتند از:

$$X_i^* = \frac{X_i - X}{S_x} = \frac{x_i}{S_x} \ , \ Y_i^* = \frac{Y_i - \overline{Y}}{S_y} = \frac{y_i}{S_y} \qquad (۲-۴۶)$$

توجه شود که $\sum X_i^* = \sum Y_i^* = 0$ است، زیرا

$$\sum X_i^* = \sum \frac{x_i}{S_x} = \frac{\sum x_i}{S_x} = 0$$

بنابراین $\overline{X}^* = \overline{Y}^* = 0$ خواهد بود.

معادله رگرسیون برای داده‌های استانداردشده، عبارت است از:

$$Y_i^* = \alpha^* + \beta^* X_i^* \qquad (۲-۴۷)$$

برای برآورد ضرایب، ابتدا $\sum e_i^{*2}$ را حساب کرده و سپس نسبت‌به $\hat{\alpha}^*$ و $\hat{\beta}^*$ مشتق می‌گیریم:

$$\sum e_i^{*2} = \sum (Y_i^* - \hat{\alpha}^* - \hat{\beta}^*)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sum e_i^{*2}}{\partial \hat{\alpha}^*} = 0 \\ \dfrac{\partial \sum e_i^{*2}}{\partial \hat{\beta}^*} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \hat{\alpha}^* = \overline{Y}^* - \hat{\beta}^* \overline{X}^* = 0 \ , \ \hat{\beta}^* = \frac{\sum x_i^* y_i^*}{\sum x_i^{*2}}$$

اگر به‌جای $x^*$ و $y^*$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

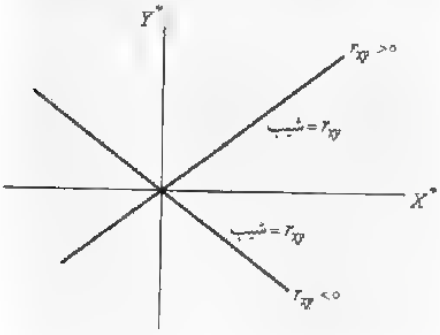
$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum x_i^* y_i^*}{\sum x_i^{*2}} = \frac{\sum \frac{x_i}{S_x} \frac{y_i}{S_y}}{\sum \frac{x_i^2}{S_x^2}} = \frac{S_x}{S_y} \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{S_x}{S_y} \beta$$

که $\beta$ برابر با ضریب $X$ در معادله $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ است. از طرف دیگر می‌توان $\hat{\beta}^*$ را با توجه به $S_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n}$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{\beta}^* = \frac{S_x}{S_y} \frac{\sum x_i y_i}{n S_x^2} = \frac{\sum x_i y_i / n}{S_x S_y} = r_{xy} \qquad (۲-۴۸)$$

بنابراین $\hat{\beta}^*$ برابر با ضریب همبستگی $X$ و $Y$ است و در نتیجه معادله رگرسیون را برای داده‌های استاندارد شده به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{Y}_i^* = \alpha^* + \hat{\beta}^* X_i^* = r_{xy} X_i^* \quad ; \quad \hat{\alpha}^* = 0 \ , \ \hat{\beta}^* = r_{xy}$$




نمودار ۱۲-۲: معادله رگرسیون با متغیرهای استانداردشده

**برآورد رگرسیون متغیرهای استاندارد شده با Eviews**

رگرسیون متغیرهای استاندارد شده را می‌توان با فرمان زیر برآورد نمود:

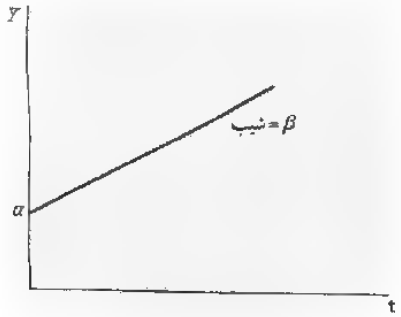
$$\text{LS} \ \frac{\text{Y}-\text{@mean(Y)}}{\text{@std(Y)}} \ \frac{\text{X}-\text{@mean(X)}}{\text{@std(X)}}$$

که ضریب $\frac{\text{X}-\text{@mean(X)}}{\text{@std(X)}}$ برابر با ضریب همبستگی بین X و Y است.

### ۷-۱۵-۲ برآورد معادله روند

گاهی اوقات برخی از متغیرها دارای روند معینی در طول زمان هستند. اگر روند $Y$ خطی باشد، یک معادله خطی را برای آن تعریف می‌کنیم:

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t \qquad (۲-۴۹)$$



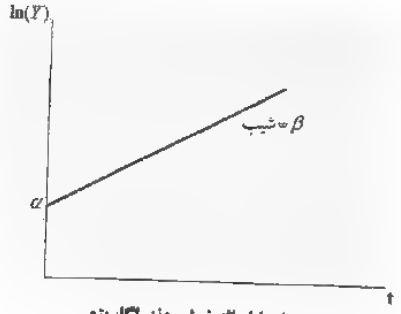

نمودار ۱۳-۲: خط روند

اگر روند غیرخطی باشد می‌توان از معادله زیر استفاده نمود.

$$Y_t = ae^{\beta t}e^{u_t} \qquad (۲-۵۰)$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین خواهیم داشت:

$$\ln Y_t = \alpha + \beta t + u_t \qquad (۲-۵۱)$$




نمودار ۱٤-۲: خط روند لگاریتمی

در معادله (۲-۵۱) شیب خط ($\beta$) برابر با نرخ رشد $Y$ است.

**برآورد معادله روند با Eviews**

برای برآورد روند خطی، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

LS Y C @trend

@trend بیانگر متغیر روند t می‌باشد که ضریب آن برابر با $\beta$ است. برای برآورد معادله روند غیرخطی از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

LS ln(Y) C @trend

### ۸-۱۵-۲ برآورد معادله نرخ رشد

برای برآورد معادله نرخ رشد، لازم است که تابع نمایی زیر را در نظر بگیریم.

$$Y_t = ae^{\beta t}e^{u_t} \qquad (۲-۵۲)$$

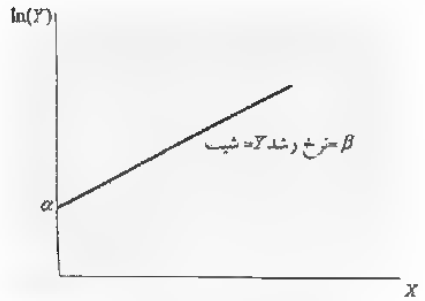
که لگاریتم آن عبارت است از:

$$\ln Y_t = \alpha + \beta t + u_t \;;\; \alpha = \ln\alpha \qquad (۲-۵۳)$$

با مشتق‌گیری نسبت‌به $t$، نرخ رشد $Y$ (که با $\dot{Y}$ نشان می‌دهیم) به‌دست می‌آید.

$$\dot{Y} = \frac{d\ln Y}{dt} = \beta \qquad (۲-۵۴)$$

زیرا $\frac{d\ln Y}{dt}$ برابر با $\frac{dY/t}{Y}$ است که معادل با نرخ رشد $Y$ می‌باشد. بنابراین، ضریب $t$ برابر با متوسط نرخ رشد می‌باشد. شیب خط $\ln Y$ در مقابل $t$، بیانگر متوسط نرخ رشد $Y$ خواهد بود.




نمودار ۱۵-۲: برآورد نرخ رشد متوسط

**برآورد معادله رشد با Eview**

بدین منظور فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

LS ln(Y) C @trend

ضریب *@trend* برابر با $\beta$، یعنی متوسط نرخ رشد Y می‌باشد.

**مثال ۱۴-۲:** بر اساس مثال ۲-۲، معادله زیر را برآورد کنید:

$$Y_i = aX_i^{\beta}$$

ابتدا معادله فوق را به‌صورت لگاریتمی می‌نویسیم:

$$\log(Y_i) = \log(a) + \beta\log(X_i)$$

معادله فوق بر حسب لگاریتم متغیرها به‌صورت خطی است و لذا می‌توان آن را با روش OLS برآورد نمود. نتایج برآورد به‌صورت زیر است:

$$\log(Y_i) = ۱/۴۳۵ + ۰/۵۷۴\log(X_i) \quad R^۲ = ۰/۷۵۶$$
$$(۱۰/۳) \quad (۷/۵) \qquad F = ۵۵/۷$$

در این مثال $\beta = ۰/۵۷۴$ و $a = ۱۰^{۱/۴۳۵} = ۲۷/۲۲۷$ می‌باشد. توجه شود که چون $\beta = \frac{\partial\log(Y)}{\partial\log(X)}$ است، لذا $\beta$ بیانگر درصد تغییر $Y$ به ازای درصد تغییر $X$ است که معروف به کشش $Y$ نسبت‌به $X$ می‌باشد.

**برآورد معادلات غیرخطی در Eviews**

همان‌طور که اشاره شد برای برآورد معادلات غیر خطی در Eviews می‌توان ابتدا معادله را با تبدیل‌های مناسب، خطی نمود و سپس آن را مشابه معادلات خطی برآورد نمود. به‌عنوان مثال معادله $Y=ae^{\beta X}$ را ابتدا به‌صورت $\log(Y)=\alpha+\beta X$ نوشته که $\alpha=\log(a)$ است، و سپس با فرمان زیر آن را مانند یک معادله خطی برآورد می‌کنیم:

LS log(Y) C X

و یا می‌توان آن را با فرمان NLS (حداقل مربعات غیرخطی) به‌صورت زیر برآورد نمود:

NLS Y=C(1)*exp(C(2)*X)

روش دیگر این است که از منوی Quick گزینه Estimate Equation را انتخاب کرده که به‌دنبال آن پنجره Equation Specification باز می‌شود. در این پنجره، معادله مورد نظر را یا به‌صورت خطی با فرمان log(Y) C X وارد می‌کنیم و یا به‌صورت غیرخطی یعنی Y=C(1)*exp(C(2)*X) وارد می‌کنیم و با انتخاب OK نتایج مربوطه به‌دست می‌آید.

## ۲-۱۶ تحلیل همبستگی

تحلیل همبستگی به بررسی رابطه بین دو یا چند متغیر می‌پردازد که معمولاً با کوواریانس یا ضریب همبستگی بیان می‌شود.

### ۲-۱۶-۱ کوواریانس

برای بیان همبستگی خطی بین دو متغیر $X$ و $Y$، یکی از معیارهای مهم و کاربردی، کوواریانس می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\sigma_{xy}=E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)=E(XY)-\mu_x\mu_y \qquad (۲-۲۶)$$

$\mu_x$ و $\mu_y$ به ترتیب امید ریاضی $X$ و $Y$ هستند. کوواریانس $X$ و $Y$ را با $\operatorname{cov}(X,Y)$ یا $\sigma_{xy}$ و تخمین آن را بر حسب داده‌های نمونه با $\hat{\sigma}_{xy}$ نشان می‌دهیم که برابر است با:

$$\hat{\sigma}_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iY_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iy_i}{n}$$

$$=\frac{\sum X_iY_i-\frac{(\sum X_i)(\sum X_i)}{n}}{n}=\frac{\sum X_iY_i}{n}-X\overline{Y}$$

مشکلی که در رابطه با کوواریانس وجود دارد این است که شدت و ضعف همبستگی خطی بین $X$ و $Y$ را بیان نمی‌کند. به‌عبارت دقیق‌تر مقدار آن کاملاً تحت تأثیر بزرگی و کوچکی مقادیر متغیرها قرار دارد. بدین منظور به مثال‌های ۲-۱۵ و ۲-۱۶ توجه کنید.

**مثال ۱۵-۲:** برای بررسی رابطه بین دو متغیر $X$ و $Y$ نمونه‌ای به حجم $n = ۵$ انتخاب شد. که برای $X$ مقادیر ۱، ۳، ۲، ۴، ۸ و برای $Y$ نیز مقادیر ۲، ۲، ۴، ۶ و ۶ به‌دست آمده است. تخمین کوواریانس $X$ و $Y$ عبارت است از:

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_iY_i$ |
|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۶ |
| ۲ | ۴ | ۸ |
| ۴ | ۶ | ۲۴ |
| ۸ | ۶ | ۴۸ |
| ۱۸ | ۲۰ | ۸۸ |

$$\overline{X} = \frac{۱۸}{۵} = ۳/۶ \quad , \quad \overline{Y} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

$$\text{cov}(X,Y) = \hat{\sigma}_{xy} = \frac{۸۸}{۵} - (۳/۶)(۴) = ۳/۲$$

چون $\hat{\sigma}_{xy}$ مثبت است پس بین $X$ و $Y$ رابطه مثبت وجود دارد.

**مثال ۱۶-۲:** فرض کنید که مشاهدات $X$ و $Y$ در مثال ۱۵-۲ در ۱۰۰ ضرب شده باشند. کوواریانس $X$ و $Y$ را حساب کنید.

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_iY_i$ |
|---|---|---|
| ۱۰۰ | ۲۰۰ | ۲۰۰۰۰ |
| ۳۰۰ | ۲۰۰ | ۶۰۰۰۰ |
| ۲۰۰ | ۴۰۰ | ۸۰۰۰۰ |
| ۴۰۰ | ۶۰۰ | ۲۴۰۰۰۰ |
| ۸۰۰ | ۶۰۰ | ۴۸۰۰۰۰ |
| ۱۸۰۰ | ۲۰۰۰ | ۸۸۰۰۰۰ |

$$\overline{X} = \frac{۱۸۰۰}{۵} = ۳۶۰ \ , \ \overline{Y} = \frac{۲۰۰۰۰}{۵} = ۴۰۰$$

$$\hat{\sigma}_{XY} = \frac{۸۸۰۰۰۰}{۵} - (۳۶۰)(۴۰۰) = ۳۲۰۰۰$$

در اینجا نیز چون کوواریانس مثبت است پس بین $X$ و $Y$ رابطه مثبت وجود دارد. در این مثال، کوواریانس $X$ و $Y$ نسبت‌به مثال قبلی ۱۰۰۰۰ برابر شده است که ناشی از بزرگ شدن مقیاس متغیرها است. اما بدیهی است که شدت همبستگی $X$ و $Y$ در هر دو حالت، یکسان است.

**خواص کوواریانس**

۱- اگر به $X$ یا $Y$ و یا به هر دو، مقدار ثابت $a$ را اضافه یا کم کنیم، کوواریانس تغییری نمی‌کند.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X+a,Y) &= \frac{\sum[(X_i+a)-(\bar{X}+a)](Y_i-\bar{Y})}{n} \\ &= \frac{\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{n} = \operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

و در حالت کلی خواهیم داشت:

$$\operatorname{cov}(X\pm a, Y\pm b) = \operatorname{cov}(X,Y)$$

۲- اگر مقدار $X$ها یا $Y$ها را در عدد ثابت $a$ ضرب کنیم، کوواریانس نیز در $a$ ضرب می‌شود.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(aX,Y) &= \frac{\sum(aX_i-a\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{n} \\ &= \frac{a\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{n} = a\operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

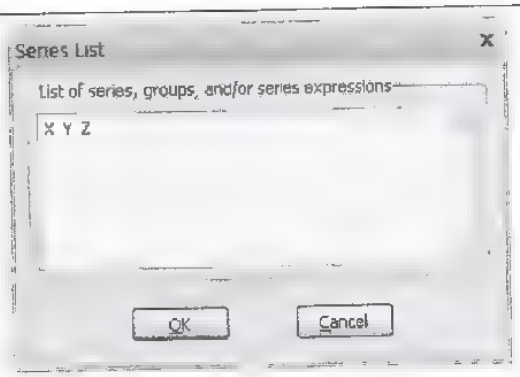
$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,aY) &= \frac{\sum(X_i-\bar{X})(aY_i-a\bar{Y})}{n} \\ &= \frac{a\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{n} = a\operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

۳- اگر $X$ها در $a$ و $Y$ها در $b$ ضرب شوند، کوواریانس در $ab$ ضرب خواهد شد.

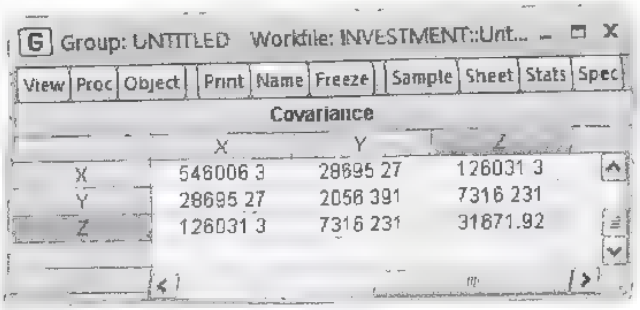
$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(aX,bY) &= \frac{\sum(aX_i-a\bar{X})(bY_i-b\bar{Y})}{n} \\ &= \frac{ab\sum(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{n} = ab\operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

**محاسبه کوواریانس با Eviews**

برای محاسبه کوواریانس با Eviews می‌توان در سطر فرمان عبارت cov(X,Y) را اجرا نمود. همچنین می‌توان از منوی Quick گزینه Group Statistics را انتخاب نمود که در این صورت پنجره Series List به‌صورت زیر باز می‌شود که نام متغیرهای مورد نظر را در آن وارد می‌کنیم:




نتایج محاسبهٔ کوواریانس‌ها به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:




قطر اصلی، واریانس هر یک از متغیرها را نشان می‌دهد، به‌عنوان مثال واریانس X برابر با ۵۴۶۰۰۶/۳ می‌باشد. سایر عناصر، کوواریانس بین متغیرها را نشان می‌دهد، مثلاً کوواریانس بین X و Y برابر با ۲۸۶۹۵/۲۷ و کوواریانس بین X و Z برابر با ۱۲۶۰۳۱/۳ و کوواریانس بین Y و Z برابر با ۷۳۱۶/۲۳۱ می‌باشد.

### ۲-۱۶-۲ ضریب همبستگی

از مثال‌های ۱۵-۲ و ۱۶-۲ روشن است که کوواریانس کاملاً متأثر از مقدار متغیرها است. به‌عنوان نمونه، مثال ۱۵-۲ بیانگر اندازه‌گیری $X$ و $Y$ برحسب متر است ولی در مثال ۱۶-۲ مقادیر $X$ و $Y$ بر حسب سانتی‌متر اندازه‌گیری شده است. بدیهی است که با تغییر مقیاس، شدت و ضعف همبستگی بین $X$ و $Y$ دچار تغییر نخواهد شد، در حالی که کوواریانس کوچک و بزرگ می‌شود.

برای حل این مشکل باید ابتدا متغیرهای $X$ و $Y$ را استاندارد نمود تا مقیاس اندازه‌گیری متغیرها تأثیر خود را از دست بدهد و سپس کوواریانس آنها را محاسبه کنیم:

$$Z_x = \frac{X-\mu_X}{\sigma_x} \qquad , \quad Z_y = \frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}$$

$\sigma_x$ و $\sigma_y$ به ترتیب واریانس $X$ و $Y$ هستند. $Z_x$ و $Z_y$ استاندارد شدهٔ $X$ و $Y$ می‌باشند و از مقیاس متغیرهای $X$ و $Y$ متأثر نمی‌شوند. به‌عبارت دیگر اگر مقادیر $X$ و $Y$ بزرگ یا کوچک شوند، استاندارد شدهٔ آنها تغییر نمی‌کند. به‌عنوان مثال اگر $X$ را دو برابر کنیم، میانگین و انحراف معیار $X$ نیز دو برابر شده و لذا صورت و مخرج نیز دو برابر خواهند شد و $Z_x$ ثابت می‌ماند. حال با توجه به اینکه امید ریاضی $Z_x$ و $Z_y$ برابر با صفر است کوواریانس $Z_x$ و $Z_y$ را که موسوم به ضریب همبستگی $X$ و $Y$ است به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Z_x,Z_y) = \sigma_{Z_x,Z_y} &= E(Z_xZ_y) = E\left(\frac{X-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{Y-\mu_y}{\sigma_y}\right) \\ &= \frac{E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \rho_{xy}\end{aligned} \tag{۲-۳۴}$$

تخمین ضریب همبستگی بر اساس داده‌های نمونه را با $\hat{\rho}_{xy}$ یا $r_{xy}$ و یا به‌طور خلاصه با $\hat{\rho}$ یا $r$ نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} = r = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\hat{\sigma}_x\sigma_y} = \frac{\hat{\sigma}_{xy}}{\sqrt{\hat{\sigma}_x^2\hat{\sigma}_y^2}} &= \frac{\frac{\sum x_iy_i}{n}}{\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}\times\frac{\sum y_i^2}{n}}} \\ &= \frac{\sum X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{\left(\sum X_i^2 - n\bar{X}^2\right)\left(\sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2\right)}}\end{aligned} \tag{۲-۳۵}$$

به‌سادگی می‌توان ثابت نمود که اگر $X$ و $Y$ در مقدار ثابتی مانند $a$ ضرب یا تقسیم شوند مقدار $r$ هیچ تغییری نخواهد کرد.

**مثال ۲-۱۷:** در مثال ۲-۱۵ و ۲-۱۶ ضریب همبستگی $X$ و $Y$ را محاسبه کنید.

| $X_i$ | $Y_i$ | $X_i^2$ | $Y_i^2$ | $X_iY_i$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | ۲ | ۱ | ۴ | ۲ |
| ۳ | ۲ | ۹ | ۴ | ۶ |
| ۲ | ۴ | ۴ | ۱۶ | ۸ |
| ۴ | ۶ | ۱۶ | ۳۶ | ۲۴ |
| ۸ | ۶ | ۶۴ | ۳۶ | ۴۸ |
| ۱۸ | ۲۰ | ۹۴ | ۹۶ | ۸۸ |

$$\bar{X} = ۳/۶ , \bar{Y} = ۴ , \sum X_i^۲ = ۹۴ , \sum Y_i^۲ = ۹۶ , \sum X_i Y_i = ۸۸$$

$$r = \frac{۸۸ - (۵)(۳/۶)(۴)}{\sqrt{(۹۴ - ۵\times ۳/۶^۲)(۹۶ - ۵\times ۴^۲)}} = \frac{۱۶}{\sqrt{(۲۹/۲)(۱۶)}} = ۰/۷۴۰$$

این محاسبات را اگر برای مثال ۱۶-۲ انجام دهیم، خواهیم داشت:

$$\bar{X} = ۳۶۰ \quad , \bar{Y} = ۴۰۰$$

$$\sum X_i^۲ = ۹۴۰۰۰۰ \quad , \sum Y_i^۲ = ۹۶۰۰۰۰ \quad , \sum X_i Y_i = ۸۸۰۰۰۰$$

با قراردادن این مقادیر در فرمول $r$، مقدار ضریب همبستگی همچنان برابر با ۰/۷۴ خواهد شد.

**خواص ضریب همبستگی**

۱- اگر به $X$ها یا $Y$ها و یا هر دو آنها مقدار ثابتی را اضافه یا کم کنیم، ضریب همبستگی تغییری نخواهد کرد.

$$r = \frac{\sum[(X_i + a) - (\bar{X} + a)][(Y_i + b) - (\bar{Y} + b)]}{\sqrt{\sum[(X_i + a) - (\bar{X} + a)]^۲ \sum[(Y_i + b) - (\bar{Y} + b)]^۲}}$$

$$= \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^۲ \sum(Y_i - \bar{Y})^۲}}$$

۲- اگر $X$ها یا $Y$ها و یا هر دو را در عدد ثابتی ضرب یا تقسیم کنیم، ضرب همبستگی تغییری نخواهد کرد.

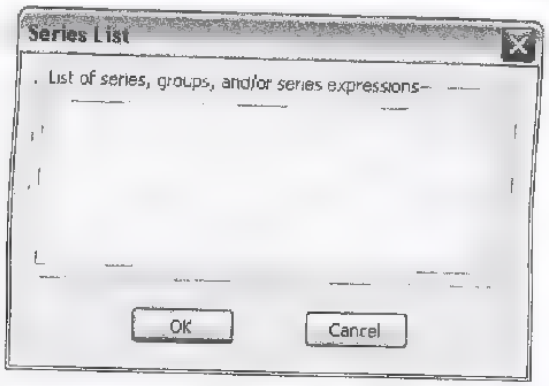
$$r_{ax,by} = \frac{\sum(aX_i - a\bar{X})(bY_i - b\bar{Y})}{\sqrt{\sum(aX_i - a\bar{X})^۲ \sum(bY_i - b\bar{Y})^۲}}$$

$$= \frac{ab\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{a^۲ \sum(X_i - \bar{X})^۲ b^۲ \sum(Y_i - \bar{Y})^۲}}$$

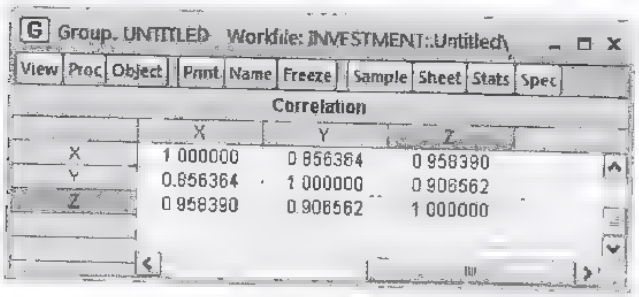
$$= \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X_i - \bar{X})^۲ \sum(Y_i - \bar{Y})^۲}} = r$$

**محاسبه ضریب همبستگی با Eviews**

برای محاسبه ضریب همبستگی با Eviews می‌توان از منوی Quick گزینه Group Statistics و سپس Correlations را انتخاب که در این صورت پنجره Series List باز می‌شود.




پس از ورود نام متغیرهای مورد نظر و انتخاب OK، نتایج محاسبهٔ ضرایب همبستگی به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:




| | X | Y | Z |
|---|---|---|---|
| X | 1.000000 | 0.856364 | 0.958390 |
| Y | 0.856364 | 1.000000 | 0.906562 |
| Z | 0.958390 | 0.906562 | 1.000000 |

قطر اصلی برابر ۱ است زیرا ضریب همبستگی هر متغیر با خودش برابر با ۱ خواهد بود. سایر عناصر ضریب همبستگی بین متغیرها را نشان می‌دهد، مثلاً ضریب همبستگی بین X و Y برابر با ۰/۸۵۶ و ضریب همبستگی بین X و Z برابر با ۰/۹۵۸ و ضریب همبستگی بین Y و Z برابر با ۰/۹۰۶ می‌باشد.

**آزمون فرضیه راجع به ضریب همبستگی**

ضریب همبستگی خطی بین $X$ و $Y$ بیانگر شدت و ضعف رابطهٔ خطی بین $X$ و $Y$ است. مقدار $r$ بین ۱+ و ۱- می‌باشد. هر چه $r$ به صفر نزدیک باشد، رابطه خطی بین $X$ و $Y$ ضعیف است و هر چه که به ۱+ و ۱- نزدیک باشد گفته می‌شود که $X$ و $Y$ رابطه قوی با هم دارند که در حالت اول رابطه قوی مثبت و در حالت دوم رابطه قوی دارند. اما سؤال این است $r$ در چه محدوده‌ای باید باشد تا بگوییم که $X$ و $Y$ با هم رابطه‌ای ندارند. برای قضاوت در این مورد،

مجدداً به آزمون فرضیه متوسل می‌شویم. برای انجام آزمون $\rho = ۰$ در مقابل $\rho \neq ۰$ از آزمون $t$ استفاده می‌شود:[1]

$$t_{n-۲} = \sqrt{n-۲}\,\frac{r}{\sqrt{۱-r^۲}} \qquad (۲-۳۶)$$

اگر مقدار $t$ از مقدار بحرانی (که معمولاً برابر با ۲ می‌باشد) بزرگتر باشد، فرضیه $\rho = ۰$ رد می‌شود و ضریب همبستگی از نظر آماری معنادار است.

**مثال ۱۸-۲:** در مثال ۲-۲ ضریب همبستگی برابر با ۰/۸۵۹ می‌باشد. آیا ضریب همبستگی از نظر آماری معنادار است؟

$$t_{n-۲} = \sqrt{۲۰-۲}\,\frac{۰/۸۵۹}{\sqrt{۱-۰/۸۵۹^۲}} = ۷/۱۱۸$$

چون مقدار $t = ۷/۱۱۸$ در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد، لذا فرضه $\rho = ۰$ رد می‌شود و ضریب همبستگی بین $X$ و $Y$ تفاوت معناداری از صفر دارد.

**مثال ۱۹-۲:** در مثال ۱۷-۲ ضریب همبستگی برابر با ۰/۷۴ می‌باشد. آیا ضریب همبستگی از نظر آماری معنادار است؟

$$t_{n-۲} = \sqrt{۵-۲}\,\frac{۰/۷۴}{\sqrt{۱-۰/۷۴^۲}} = ۱/۹۱$$

چون مقدار $t = ۱/۹۱$ در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد (در اینجا عدد بحرانی برابر با $t_{۰/۰۲۵,۳} = ۳/۱۸۲$ است)، لذ. فرضه $\rho = ۰$ رد نمی‌شود و ضریب همبستگی بین $X$ و $Y$ تفاوت معناداری از صفر ندارد.

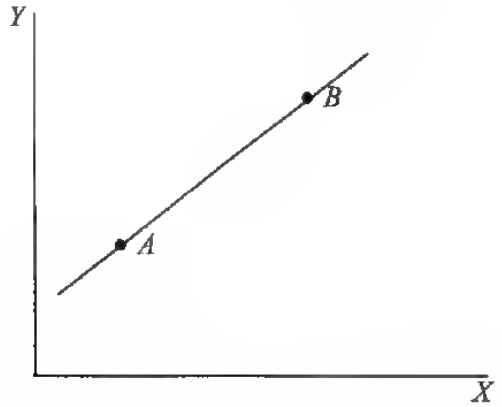
در مثال ۱۹-۲ علی‌رغم اینکه ضریب همبستگی برابر با ۰/۷۴ است، ولی به‌دلیل اندک بودن تعداد مشاهدات، تفاوت معناداری با صفر ندارد. این در حالی است که ضریب همبستگی ۰/۲ با ۲۰۰ مشاهده و یا ضریب همبستگی ۰/۴ با ۳۰ مشاهده، از نظر آماری معنادار است. توجه شود که اگر فقط دو مشاهده داشته

---

[1] رابطه بین $r$ و توزیع $t$ با درجه آزادی $n-۲$ دقیقاً معادل با توزیع $t$ است که در آزمون معنادار بودن ضریب $\beta$ به‌کار می‌رود. اگر در $t$ به جای $\hat{\beta}$ و $\hat{\sigma}^۲$ قرار داده و نتیجه را ساده کنیم خواهیم داشت:

$$t_{n-۲} = \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta})}} = \sqrt{\sum x_i^۲}\,\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\hat{\sigma}^۲}} = \sqrt{n-۲}\,\frac{r}{\sqrt{۱-r^۲}}$$

باشیم در این صورت ضریب همبستگی برابر با ۱ است و خط رگرسیون دقیقاً از این دو نقطه می‌گذرد، ولی از نظر آماری معنادار نیست.




نمودار ۱٦-۲: همبستگی خطی با دو مشاهده

## مسائل

۱- با توجه به اطلاعات زیر مقادیر $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ و $SE(\hat{\beta})$ را حساب نمایید؟ آیا $\hat{\beta}$ از لحاظ آماری معنادار است؟

$$n=۴۰ \ , \ \overline{X}=۴۲۰ \ , \ \overline{Y}=۱۰۰ \ , \ \sum X_iY_i=۸۵۰۰۰۰$$
$$\sum X_i^۲=۴۰۰۰۰۰۰ \ , \ RSS=۱۴۰$$

۲- مدل‌های زیر مفروض هستند:

$$\ln Y_i=\beta_۱+\beta_۲\ln X_i+u_i$$
$$\ln Y_i^*=\alpha_۱+\alpha_۲\ln X_i^*+u_i^*$$

که $Y_i^*=w_۱Y_i$ و $X_i^*=w_۲X_i$ بوده $w_۱$ و $w_۲$ ثابت هستند. آیا $R^۲$ در این دو مدل، متفاوت است؟ ثابت کنید.

۳- در مسئله ۱ فصل اول، رگرسیون $Y$ روی $X$ را برآورد کرده و نتایج آن را تحلیل نمایید.

۴- در مسئله ۱ فصل اول، تغییرات $Y$ را روی تغییرات $X$ برازش کرده و نتایج آن را تحلیل و با مسئله ۳ مقایسه نمایید.

۵- در مسئله ۱ فصل اول، ضریب همبستگی بین $X$، $Y$ و $Z$ را حساب کرده و آزمون معنی‌دار بودن آنها را انجام دهید.

۶- در مسئله ۱ فصل اول، ضریب همبستگی بین نرخ رشد متغیرهای $X$، $Y$ و $Z$ را حساب کرده و آزمون معنی‌دار بودن آنها را انجام دهید. نتایج را با مسئله ۵ مقایسه کنید.

۷- مقدار آماره $t$ برای ضریب $X$ در مسئله ۳ را با مقدار آماره $t$ در آزمون معنی‌دار بودن ضریب همبستگی بین $X$ و $Y$ مقایسه کنید. دلیل تفاوت یا مشابهت چیست؟

۸- ثابت کنید که $\sum X_i e_i = ۰$ است.

۹- ثابت کنید که $\sum \hat{Y}_i e_i = ۰$ است.

۱۰- معادله رگرسیون برای $n = ۳۰$ مشاهده به‌صورت زیر برآورد شده است:

$$\hat{Y}_i = ۲/۵ + ۴/۲X_i \quad , \quad R^۲ = ۰/۸$$

مقدار آماره $t$ برای ضریب $X_i$ و آماره $F$ را حساب کنید.

۱۱- در مسئله ۱۰، فرضیه $\beta = ۵$ را آزمون کنید.

۱۲- در معادله $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ مقادیر متغیرها بر حسب هزار ریال بیان شده است. اگر مقادیر متغیرها را بر حسب ریال بیان کنیم آیا مقدار تخمینی ضرایب، تغییر خواهد کرد. چرا؟

۱۳- در مسئله ۳، رگرسیون $Y$ روی $X$ را برای دوره ۷۰-۱۳۵۱ برآورد کرده و سپس مقادیر $Y$ را برای دوره ۸۰-۱۳۷۱ پیش‌بینی کرده و با مقادیر واقعی مقایسه کنید.

۱۴- مفهوم فرض $E(u_i \mid X_i)$ را به‌طور مستدل توضیح دهید.

۱۵- مقادیر زیر را داریم:

$$\sum X_i = ۱۳۰ \quad , \quad \sum Y_i = ۲۴۰ \quad , \quad n = ۲۰$$
$$\sum X_i^۲ = ۱۰۰۰ \quad , \quad \sum Y_i^۲ = ۳۵۰۰ \quad , \quad \sum X_i Y_i = ۱۸۰۰$$

معادله $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ را برآورد کرده و مقادیر $t$، $F$ و $R^۲$ را حساب کنید.

۱۶- در مسئله ۱۵، ضریب هبستگی $X$ و $Y$ را حساب کرده و آزمون معنادار بودن آن را انجام دهید.

۱۷- ثابت کنید که $\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2})$ است.

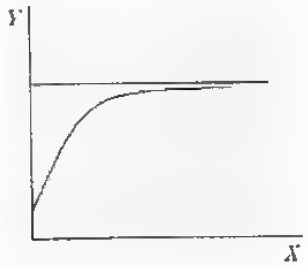
۱۸- ثابت کنید که $\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$ است.

۱۹- در رگرسیون $Y_i = \alpha + \beta D_i + u_i$ متغیر $D_i$ فقط مقادیر صفر و یک را اختیار می‌کند. مقدار $D_i$ برای $n_1$ مشاهده برابر با ۱ و برای بقیه مشاهدات ($n_2$) برابر با صفر است ($n_1 + n_2 = n$). تخمین‌زنندهٔ $\alpha$ و $\beta$ را به‌دست آورده و واریانس آنها را حساب کنید.

۲۰- در رگرسیون $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ امید ریاضی و واریانس شرطی را حساب کنید.

۲۱- ثابت کنید که اگر دو متغیر $X$ و $Y$ مستقل باشند، در آن صورت امید ریاضی شرطی $Y$ مستقل از $X$ خواهد بود.

۲۲-اگر مشاهدات $X$ و $Y$ به‌صورت نمودار زیر باشد، چه معادله‌ای را برای آن پیشنهاد می‌کنید.




۲۲- در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ کوواریانس $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را حساب کنید. آیا امکان دارد که $\text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0$ باشد.

۲۳- ثابت کنید که $\sum \hat{y}_t^2 = \sum \hat{y}_t y_t$ است.

۲۴- ثابت کنید که $\Sigma \hat{y} e_t = 0$ است.

۲۵- ثابت کنید که معادله $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t$ از نقطه $(\bar{X}, \bar{Y})$ می‌گذرد. نمودار آن را ترسیم کنید.

۲۶- ثابت کنید که $\Sigma e_t = 0$ معادل با $\bar{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\bar{X}$ است.

۲۷- در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ اگر $u_t$ و $X_t$ مستقل نباشند، واریانس $\hat{\beta}$ را حساب کنید. آیا با عبارت $\frac{\sigma^2}{\Sigma x_t^2}$، متفاوت خواهد بود یا نه؟

۲۸- فرض کنید که در معادله $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ ، متغیرهای $u_t$ و $X_t$ همبستگی مثبت داشته باشند. اگر $\beta>0$ باشد، آنگاه ثابت کنید که تخمین $\beta$ از روش OLS منجر به برآورد بیش از حد $\beta$ خواهد شد.

۲۹- اگر $X_t$ و $u_t$ در معادله $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ مستقل نباشند، آیا تخمین $\alpha$ از روش OLS دچار تورش خواهد شد؟

۳۰- ثابت کنید که در رگرسیون $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$، تغییرات توضیح داده شده برابر است با:

$$ESS=\hat{\beta}^2\sum x_t^2=\hat{\beta}\sum x_t y_t$$

۳۱- اگر معادله $Y_t=a+ae^{\beta X_t}$ را داشته باشیم، اولاً نمودار آن را رسم کرده و ثانیاً چگونه آن را تبدیل به یک مدل قابل تخمین و خطی می‌کنید.

۳۲- اگر رگرسیون فقط دارای عرض از مبدأ باشد $(Y_t=\alpha+u_t)$، ثابت کنید که $\hat{\alpha}=\bar{Y}$ و $\mathrm{var}(\hat{\alpha})=\frac{\sigma^2}{n}$ می‌باشد.

۳۳- رگرسیون‌های زیر را داریم:

$$1)\ Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$$

$$2)\ X_t=a+bY_t+v_t$$

ضریب تعیین معادله (۱) و (۲) را به‌ترتیب با $R_1^2$ و $R_2^2$ نشان می‌دهیم.

الف) ثابت کنید که $R_1^2=R_2^2$ است.

ب) ثابت کنید که $\hat{\beta}\leq\frac{1}{b}$ است.

ج) آیا تساوی $\sum\hat{u}_t^2=\sum\hat{v}_t^2$ برقرار است؟

۳۴- رگرسیون‌های زیر برآورد شده‌اند:

$$Y_t=2/45+1/25X_t$$
$$X_t=4.52+0/84Y_t$$

آیا نتایج فوق درست است؟

۳۵- معادلات زیر برای درآمد و مصرف برآورد شده‌اند:

$$Y_t=\alpha+1/25C_t$$
$$C_t=a+0/75Y_t$$

الف) ضریب تعیین ($R^2$) را برای هر یک از این معادلات حساب کنید.

ب) آیا ضرایب تخمینی، معنادار هستند؟

ج) اگر $Y=C+S$ و $S$ پس‌انداز باشد، ضریب همبستگی بین $Y$ و $S$ و بین $C$ و $S$ را حساب کنید.

۳۶- مقادیر $Y_t$ روی زمان ($t$) برازش می‌شود که $t$ از سال ۱۳۶۱ تا ۱۳۹۱ می‌باشد.

$$Y_t=\alpha+\beta t+u_t$$

ابتدا متغیر زمان را با مقادیر $t=$۱۳۶۱،۱۳۶۲،...،۱۳۹۰ نشان داده و $\alpha$ و $\beta$ را برآورد می‌کنیم که با $\hat{\alpha}_1$ و $\hat{\beta}_1$ نشان می‌دهیم. حال برای متغیر زمان مقادیر $t=$۱،۲،...،۳۰ را تعریف کرده و مجدداً معادله را برآورد کرده و با $\hat{\alpha}_2$ و $\hat{\beta}_2$ نشان می‌دهیم. چه تفاوتی بین $\hat{\alpha}_1$ با $\hat{\alpha}_2$ و همچنین $\hat{\beta}_1$ با $\hat{\beta}_2$ وجود دارد؟

۳۷- معادله $Y_t=aX_t^{\beta}$ را داریم. برای خطی کردن آن از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\log Y_t=\alpha+\beta X_t$$
$$\ln Y_t=\alpha+\beta X_t$$

آیا $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ در این دو مدل متفاوتند؟

۳۸- در مدل $Y_t=aX_t^{\beta}$ متغیر تصادفی $u_t$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2$ دارد. اگر برای برآورد این مدل از شکل لگاریتمی آن استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\ln Y_t=\alpha+\beta X_t+\ln u_t \quad , \quad \alpha=\ln a$$

الف) توزیع $\ln u_t$ چگونه خواهد بود؟

ب) اگر بخواهیم شرط $E(\ln u_t)=$۰ برقرار باشد، توزیع $u_t$ چگونه خواهد بود؟

۳۹- رگرسیون $\hat{Y}_t=-$۲/۵+۰/۸$X_t$ با $n=$۴۲ مشاهد برآورد شده است. اگر $R^2=$۰/۴۵ باشد، فرضیه‌های زیر را آزمون کنید:

الف) $H_0:\beta=$۰

ب) $H_0:R^2=$۰

۴۰- در مسئله ۳۹ اگر $n=$۱۰ باشد فرضیه‌های مورد نظر را آزمون کنید. نتیجه آزمون چه تفاوتی کرد؟ چرا؟

۴۱- در رگرسیون $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ وقتی از روش OLS استفاده می‌شود، ثابت کنید که روابط زیر برقرار است:

الف) $\sum e_i = ۰$

ب) $\sum e_i X_i = ۰$

ج) $\sum e_i \hat{Y}_i = ۰$

د) $\sum Y_i = \sum \hat{Y}_i$

۴۲- نشان دهید که در رگرسیون $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ شرط $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$ برقرار است ولی در رگرسیون $Y_t = \beta X_t + u_t$، برقرار نیست. عدم برقراری این شرط به چه معنا است؟

۴۳- ثابت کنید که $R^۲$ برابر با ضریب همبستگی $\hat{Y}_t$ و $Y_t$ است.

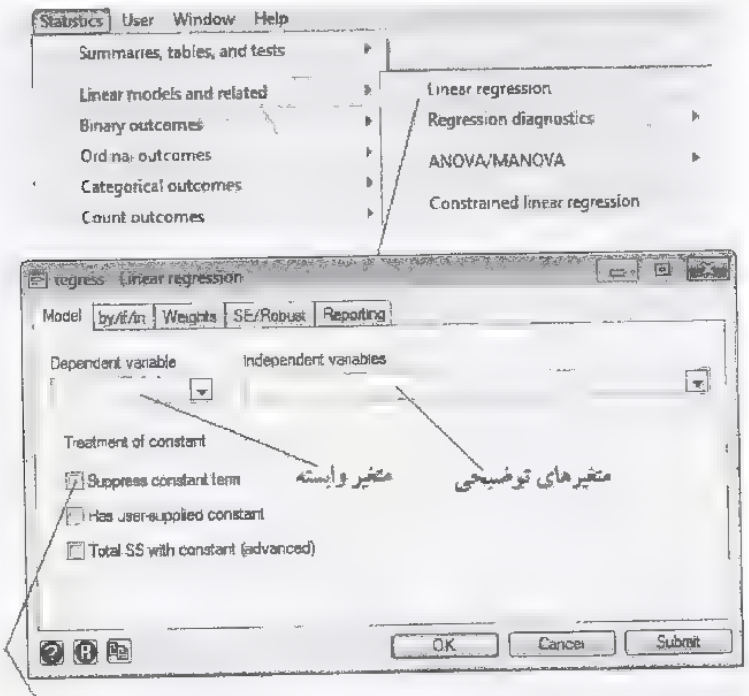
## ضمیمه فصل ۲: رگرسیون ساده در Stata

### برآورد رگرسیون ساده با Stata

فایل data1

به‌منظور برآورد رگرسیون خطی، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Linear regression → Linear models and related → Statistics




استاتا معادله را با عرض از مبدأ برآورد می‌کند
اگر عرض از مبدأ نمی‌خواهید اینجا را کلیک کنید

علاوه بر این، می‌توان معادله را با فرمان زیر تخمین زد:

```
reg y x
```

اگر بخواهیم Y را فقط روی عرض از مبدأ رگرس کنیم، از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

```
reg y
```

و برای رگرسیون بدون عرض از مبدأ، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
reg y x, noc
```

بعد از اجرای هر یک از فرمان‌های فوق، نتایج تخمین عبارت است از:

رگرسیون ip روی rr

مجموع مجذور تغییرات

درجه آزادی

میانگین تغییرات

تعداد مشاهدات

F

سطح معنی‌داری F

$R^2$

$\bar{R}^2$

$\hat{\sigma}$

```
regress ip rr

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      21
-------------+------------------------------           F(  1,    19) =    6.78
       Model |  798106043     1  798106043           Prob > F      =  0.0175
    Residual |  2.2374e+09    19  117756217           R-squared     =  0.2629
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.2241
       Total |  3.0355e+09    20  151773708           Root MSE      =  10852

------------------------------------------------------------------------------
          ip |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rr |  -844.9209   324.5471    -2.60   0.017    -1524.206   -165.6361
       _cons |   20131.31   2587.601     7.78   0.000     14715.4    25547.22
------------------------------------------------------------------------------
```

ESS

RSS

TSS

ضریب rr

عرض از مبدأ

تخمین ضرایب

انحراف معیار ضرایب

نسبت t

سطح معنی‌داری ضرایب

فاصله اطمینان ۹۵ درصدی برای ضرایب

### محاسبه مقادیر برآوردی و باقیمانده‌ها

برای محاسبهٔ مقادیر برآوردی Y یعنی $\hat{Y}$، بعد از برآورد معادله مورد نظر، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
predict yhat
```

برای محاسبه باقیمانده‌ها (خطاها) نیز فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
predict e, residuals
```

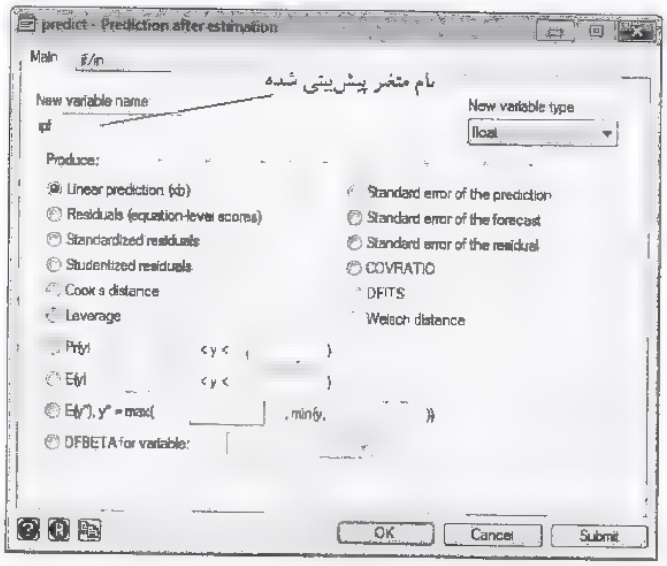
به‌جای روش فوق می‌توان به روشی که در قسمت بعدی، برای پیش‌بینی گفته می‌شود، عمل نمود.

### پیش‌بینی با Stata

پیش‌بینی به دو صورت است: درون نمونه‌ای و برون نمونه‌ای. پیش‌بینی درون‌نمونه‌ای مشابه برآورد مقادیر تخمینی است که در بالا به آن اشاره شد. این نوع پیش‌بینی را به صورت زیر نیز می‌توان انجام داد.
بدین منظور، بعد از تخمین مدل، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Predictions, Residuals, etc → Postestimation → Statistics

با انتخاب مسیر فوق پنجره زیر باز می‌شود که گزینه‌های مربوط به آن عبارتند از:




با انجام مراحل فوق، مقادیر پیش‌بینی شده ip با نام ipf محاسبه می‌شود. برای مقایسه آنها می توان با فرمان زیر نمودار مربوطه را ترسیم نمود.

```
twoway (line ip ipf t)
```

همچنین برای محاسبهٔ باقیمانده‌ها (خطاهای پیش‌بینی)، مشابه محاسبهٔ مقادیر پیش‌بینی عمل کرده و در پنجرهٔ مربوط به پیش‌بینی، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

e را برای باقیمانده‌ها انتخاب می‌کنیم

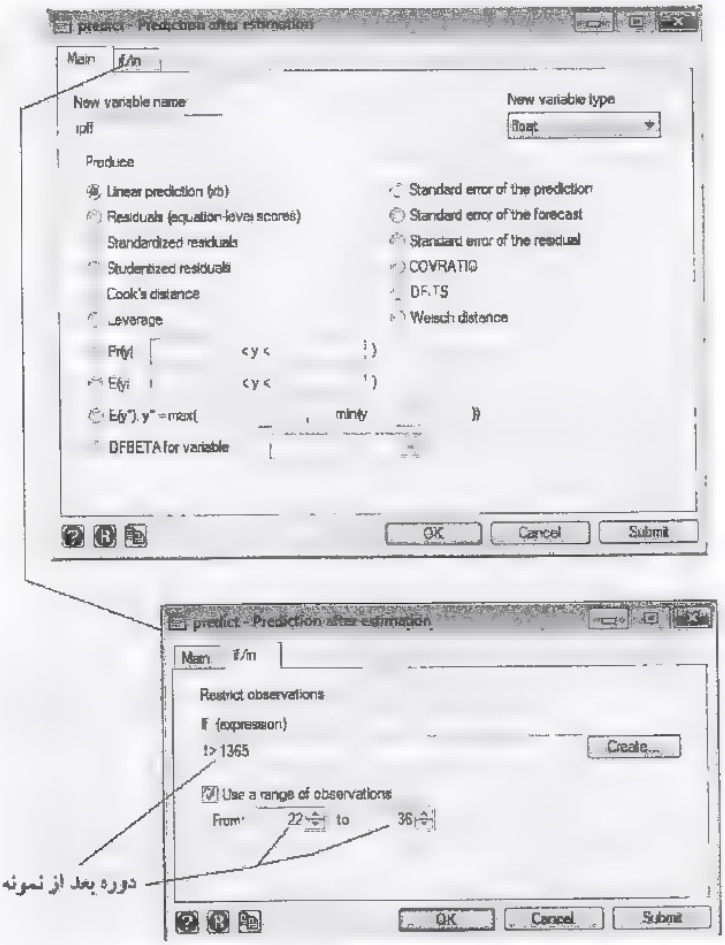
این گزینه را انتخاب می‌کنیم

در قسمت variables نام متغیر e اضافه می‌شود

برای پیش‌بینی برون نمونه‌ای، ابتدا مقادیر متغیر توضیحی (در اینجا IT) را برای دوره بعد از نمونه، اضافه می‌کنیم:

مقادیر IT را برای سال‌های بعد از نمونه برابر با ۴ فرض می‌کنیم

حال پنجره predict را باز کرده و نام متغیر موردنظر را (در اینجا ipff) وارد می‌کنیم. سپس منوی if/in را انتخاب کرده و دوره پیش‌بینی برون نمونه‌ای را وارد می‌کنیم.

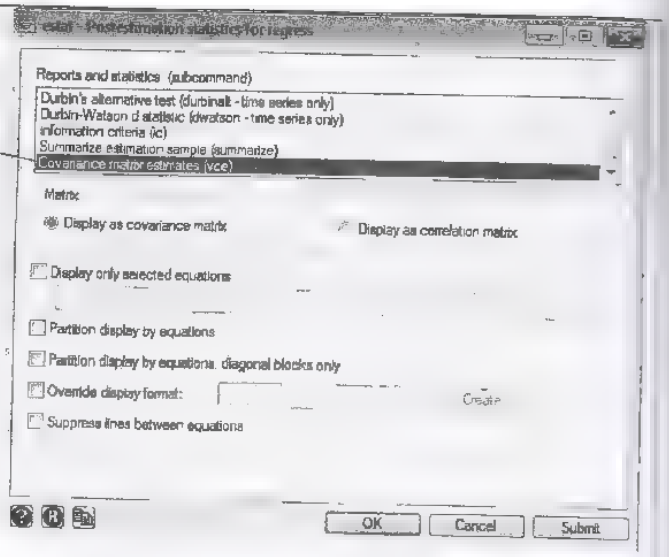



با انتخاب OK نتایج پیش‌بینی برون نمونه‌ای به‌دست می‌آید که می‌توان مقادیر آن را مشاهده و ترسیم نمود. برای رسم آن می‌توان از فرمان tsline ip ipff if t>1365 استفاده نمود.

## محاسبهٔ ماتریس واریانس- کوواریانس ضرایب

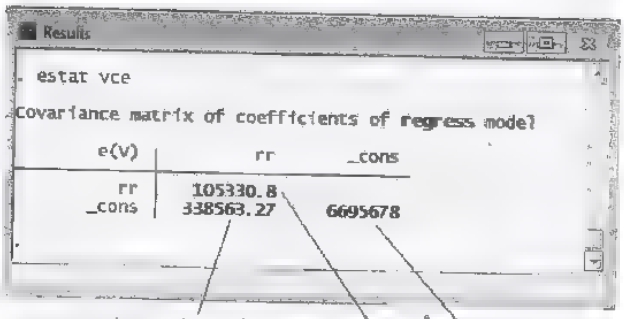
بدین منظور مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Report and Statistics → Postestimation → Statistics




برای محاسبهٔ ماتریس واریانس- کوواریانس ضرایب

نتایج عبارتند از:




کوواریانس ضرایب

واریانس عرض از مبدأ

واریانس ضریب rr

## برآورد معادلات غیرخطی با Stata

در سطر فرمان معادلهٔ مورد نظر را وارد می‌کنیم. مثال‌های زیر نحوهٔ تخمین معادلات غیرخطی را نشان می‌دهند:

$Y=\alpha+\beta X \quad \Rightarrow \quad$ nl (y={b0}+{b1}*x)

$Y=\alpha+\frac{\beta}{X} \quad \Rightarrow \quad$ nl (y={b0}+{b1}/x)

$Y=\alpha+\beta X^{2} \quad \Rightarrow \quad$ nl (y={b0}+{b1}*x^2)

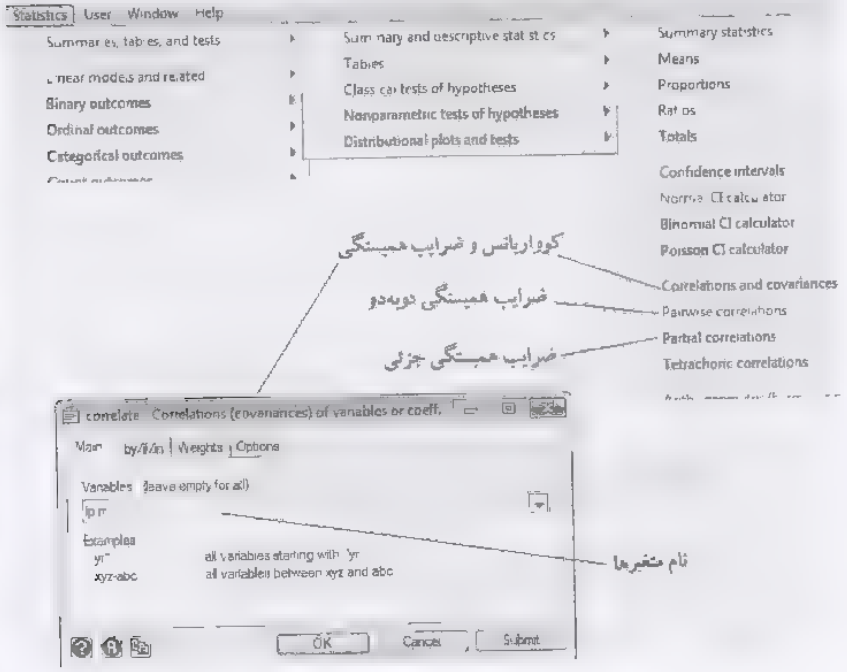
$Y=\alpha X^{\beta} \quad \Rightarrow \quad$ nl (y={b0}*x^{b1})

$Y=\alpha+\beta X^{\theta} \quad \Rightarrow \quad$ nl (y={b0}+{b1}*x^{b3})

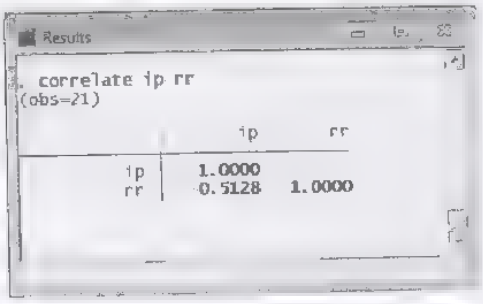
## محاسبهٔ ضرایب همبستگی

برای محاسبهٔ ضرایب همبستگی، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

summary and description statistics → Summaries, Tables, and test → Statistics




نتایج عبارتند از:




## لحاظ نکردن برخی از مشاهدات

اگر بخواهیم در تخمین معادلات و یا در سایر محاسبات، شرطی را قایل شویم می‌توان آن را با if لحاظ نمود. به عنوان مثال می‌خواهیم آن بخش از مشاهدات که y برابر صفر است، در نظر گرفته نشوند. بدین منظور از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

Drop if y==0

این فرمان موجب حذف آن بخش از مشاهدات می‌شود که y=۰ است. همچنین می‌توان به جای صفر هر عدد دیگری را نیز درنظر گرفت. به جای مساوی می‌توان از کوچکتر و بزرگتر نیز استفاده نمود.

علاوه بر این، می‌توان روی معادله رگرسیون شرط گذاشت. مثلاً می‌خواهیم معادله را به ازای داده‌هایی تخمین بزنیم که Z>۰ باشد. Z هر متغیری می‌تواند باشد، اعم از اینکه متغیر توضیحی، وابسته و یا حتی در معادله موجود نباشد.

```
reg y x  if z>=0
```

فصل سوم

# رگرسیون چندمتغیره

## ۳-۱ مقدمه

در فصل دوم، رگرسیون ساده و مفاهیم اصلی آن تشریح گردید. در این فصل رگرسیون چندمتغیره را بررسی می‌کنیم که در حالت کلی شامل $K$ متغیر توضیحی است. برای سادگی بحث، ابتدا حالت دو متغیره و سپس حالت کلی را بررسی خواهیم کرد.

## ۳-۲ رگرسیون دو متغیره: مفاهیم و فروض

در اینجا برای سادگی، بحث را با رگرسیون دو متغیره یعنی رگرسیونی که دارای دو متغیر توضیحی است، شروع می‌کنیم. بدین منظور معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \qquad (۳-۱)$$

که در آن $\alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}$ جزء غیرتصادفی یا معین و $u_i$ جزء تصادفی یا اخلال می‌باشد.

در مورد $u_i$ تمام فروض رگرسیونِ یک متغیره برقرار است و لذا برای $Y_i$ داریم:

$$E(Y|X_1, X_2) = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} \qquad (۳-۲)$$

$$\mathrm{var}(Y|X_1, X_2) = \mathrm{var}(u_i \mid X_1, X_2) = \sigma^2 \qquad (۳-۳)$$

یکی از مشکلات مدل‌های چندمتغیره، مسئله همخطی بین متغیرهای توضیحی $X_1$ و $X_2$ است. همخطی یا وابستگی خطی بین این دو متغیر را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$\lambda_1 X_{1i} + \lambda_2 X_{2i} = 0 \qquad (۳-۴)$$

اگر هیچ همخطی وجود نداشته باشد، آنگاه $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ است. ولی اگر همخطی، کامل باشد در این صورت $\lambda_1$ و $\lambda_2$ صفر نخواهند بود و لذا می‌توان (۴-۳) را به‌صورت زیر نوشت:

$$X_{2i} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} X_{1i} \Rightarrow X_{2i} = aX_{1i} \quad ; \; a = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad (۳-۵)$$

حال اگر (۵-۳) را در (۱-۳) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 (aX_{1i}) + u_i \\ &= \alpha + (\beta_1 + \beta_2 a) X_{1i} + u_i \\ &= \alpha + \beta X_{1i} + u_i \quad ; \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 a \end{aligned} \qquad (۳-۶)$$

بنابراین در صورت همخطی کامل، نمی‌توان ضرایب مدل (۱-۳) را برآورد نمود، بلکه فقط دو ضرایب $\alpha$ و $\beta$ برآورد می‌شوند و امکان برآورد $\beta_1$ و $\beta_2$ وجود ندارد.

## ۳-۳ تخمین ضرایب رگرسیون دو متغیره و خواص آنها

برای تخمین ضرایب مدل رگرسیون دو متغیره، مانند رگرسیون یک متغیره، مقدار واقعی را با $Y_i$ و مقدار تخمینی را با $\hat{Y}_i$ نشان می‌دهیم. لذا خطای تخمین عبارت است از:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i})$$

و مجموع مجذور خطاها عبارت است از:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i})^2 \qquad (۳-۷)$$

ضرایب $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ باید به‌گونه‌ای تعیین شوند که مجموع مجذور خطا، حداقل شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\alpha}} &= -2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}) = 0 \quad \text{یا} \quad \sum e_i = 0 \\ \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} &= -2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}) X_{1i} = 0 \quad \text{یا} \quad \sum e_i X_{1i} = 0 \\ \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} &= -2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \hat{\beta}_2 X_{2i}) X_{2i} = 0 \quad \text{یا} \quad \sum e_i X_{2i} = 0 \end{aligned} \qquad (۳-۸)$$

معادله اول را به‌صورت $\sum Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}$ نوشته و با تقسیم طرفین آن بر $n$ رابطه $\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$ را به‌دست می‌آوریم. اگر در معادلات دوم و سوم به‌جای $\hat{\alpha}$ قرار داده و آنها را بر حسب انحراف از میانگین بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \hat{\beta}_2 x_{2i})X_{1i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \hat{\beta}_2 x_{2i})X_{2i} = 0$$

با ساده نمودن دو معادله فوق، خواهیم داشت:

$$\sum x_{1i}y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_{1i}^2 - \hat{\beta}_2 \sum x_{1i}x_{2i} = 0 \qquad (۳-۹)$$

$$\sum x_{2i}y_i - \hat{\beta}_1 \sum x_{1i}x_{2i} - \hat{\beta}_2 \sum x_{2i}^2 = 0 \qquad (۳-۱۰)$$

که شکل ماتریسی آن عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \end{bmatrix} \qquad (۳-۱۱)$$

با حل معادلات فوق، $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱-۳: داده‌های مربوط به سه متغیر $X_1$، $X_2$ و $Y$ در جدول زیر ارائه شده است:

| $Y$ | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| ۱۰ | ۲ | ۱۰۰ |
| ۱۲ | ۲ | ۱۰۰ |
| ۱۲ | ۴ | ۱۱۰ |
| ۱۴ | ۵ | ۱۲۰ |
| ۱۴ | ۵ | ۱۲۰ |
| ۱۵ | ۴ | ۱۴۰ |
| ۱۴ | ۶ | ۱۵۰ |
| ۱۶ | ۶ | ۱۵۰ |
| ۱۸ | ۸ | ۱۲۰ |
| ۲۰ | ۱۰ | ۱۵۰ |
| ۲۰ | ۱۰ | ۱۶۰ |
| ۲۲ | ۸ | ۱۶۰ |
| ۲۲ | ۱۰ | ۱۸۰ |
| ۲۴ | ۱۲ | ۲۰۰ |
| ۲۵ | ۱۲ | ۲۲۰ |
| ۲۵ | ۱۲ | ۲۲۰ |
| ۲۸ | ۱۴ | ۲۲۰ |
| ۲۹ | ۱۶ | ۲۴۰ |
| ۳۰ | ۱۶ | ۲۵۰ |
| ۳۰ | ۱۸ | ۲۵۰ |
| ۴۰۰ | ۱۸۰ | ۳۳۶۰ |

از جدول فوق $\overline{X}_1=9$ ، $\overline{X}_2=168$ و $\overline{Y}=20$ به‌دست می‌آید. نتایج حاصل از بقیه محاسبات به‌صورت زیر است:

$$\sum x_{1i}^2=434 \quad , \quad \sum x_{2i}^2=49320$$
$$\sum y^2=800 \quad , \quad \sum x_{1i}x_{2i}=4400$$
$$\sum x_{1i}y_i=576 \quad , \quad \sum x_{2i}y_i=6040$$

تخمین ضرایب عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 434 & 4400 \\ 4400 & 49320 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 576 \\ 6040 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_1=0/896055 \ , \ \hat{\beta}_2=0/042530$$

$$\hat{\alpha}=\overline{Y}-\hat{\beta}_1\overline{X}_1-\hat{\beta}_2\overline{X}_2=20-(0/896055)(9)-(0/042530)(168)=-13/20955$$

بنابراین معادله رگرسیون عبارت است از:

$$\hat{Y}_i=-13/20955+0/896055X_{1i}+0/042530X_{2i}$$

از آنجا که $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ تابعی از $Y$ و به تبع آن تابعی از $u$ می‌باشند لذا دارای توزیع نرمال با امید ریاضی $\beta_1$ و $\beta_2$ هستند[1]. از طرف دیگر، واریانس $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$، علاوه بر $\sigma^2$ به ضریب همبستگی

---

۱- برای اثبات این قضایا لازم است که $\hat{\beta}_1$ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\hat{\beta}_1=\sum_{i=1}^{n} w_i y_i \quad , \quad w_i=\frac{\sum x_{1i}x_{2i}-x_{2i}\sum x_{1i}x_{2i}}{\sum x_{1i}\sum x_{2i}-(\sum x_{1i}x_{2i})^2}$$

بدین ترتیب $\hat{\beta}_1$ ترکیب خطی از $Y_i$ است که اگر به‌جای $Y_i$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\hat{\beta}_1=\sum w_i Y_i=\sum w_i(\alpha+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+u_i)=\beta_1+\sum w_i u_i$$

بنابراین می‌توان به‌سادگی نتیجه گرفت که $E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$ است. برای محاسبه واریانس $\hat{\beta}_1$ نیز به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)=E(\hat{\beta}_1-\beta_1)=E(\sum w_i u_i)=E(\sum w_i^2 u_i^2)$$

زیرا $E(u_i u_j)=0$ است.

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)=\sum w_i^2 E(u_i^2)=\sum w_i^2\sigma^2=\sigma^2\sum w_i^2$$

با محاسبهٔ $\sum w_i^2$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)=\sigma^2\sum w_i^2=\sigma^2\frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2\sum x_{2i}^2-(\sum x_{1i}x_{2i})^2}=\frac{\sigma^2}{(1-r_{12}^2)\sum x_{1i}^2}$$

بین $X_1$ و $X_2$ نیز بستگی دارد. هر چه ضریب همبستگی $X_1$ و $X_2$ بیشتر باشد، واریانس‌ها نیز بزرگتر می‌شود و همچنان که در آزمون فرضیهٔ معنی‌دار بودن ضرایب رگرسیون خواهیم دید، ضرایب بی‌معنی خواهند شد. در صورتِ همبستگی کامل بین $X_1$ و $X_2$ ضریب همبستگی آنها برابر با ۱ است $(r_{12}^2 = 1)$ و در این حالت واریانس‌ها بی‌نهایت خواهند شد. اما اگر $r_{12}^2 = 0$ باشد دراین صورت واریانس $\hat{\beta}_1$ مشابه واریانس آن در معادله رگرسیون $Y$ روی $X_1$ می‌باشد. همین بحث را برای $X_2$ نیز می‌توان مطرح نمود.

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{(1-r_{12}^2)\sum x_{1i}^2}\right)$$

(۳-۱۲)

$$\hat{\beta}_2 \sim N\left(\beta_2, \frac{\sigma^2}{(1-r_{12}^2)\sum x_{2i}^2}\right)$$

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X}_1)^2\sum x_{2i}^2 + (\bar{X}_2)^2\sum x_{1i}^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2\sum x_{1i}x_{2i}}{(1-r_{12}^2)\sum x_{1i}^2 x_{2i}^2}\right]\right)$$

$$r_{12}^2 = X_2 \text{ و } X_1 \text{ مجذور ضریب همبستگی} = \frac{\left(\sum x_{1i}x_{2i}\right)^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2}$$

### ۳-٤ ضریب تعیین و خطای معادلهٔ رگرسیون

برآورد واریانس $u$ که با $\hat{\sigma}^2$ نشان داده می‌شود، واریانس معادلهٔ رگرسیون می‌باشد که مشابه رگرسیون یک متغیره می‌توان آن را محاسبه نمود. انحراف معیار( $\hat{\sigma}$ ) نشان می‌دهد که به‌طور متوسط، مقادیر واقعی $Y$ چقدر از مقادیر تخمینی انحراف دارند. طبق تعریف، واریانس معادله رگرسیون برابر با متوسط مجذور خطاها می‌باشد که از تقسیم $RSS$ به درجه آزادی به‌دست می‌آید. نکته مهم در رگرسیون چندمتغیره این است که با افزایش تعداد متغیرهای توضیحی، معمولاً $RSS$ کاهش و $ESS$ افزایش می‌یابد. بدین ترتیب با افزایش تعداد متغیرهای توضیحی، قدرت توضیح‌دهندگی مدل و لذا مقدار $R^2$ افزایش می‌یابد.

اگر برای معادله $Y=\alpha+\beta X+u$ ضریب تعیین را با $R_x^2$ و برای معادله $Y=\alpha+\beta X+\gamma Z+u$ (که متغیر $Z$ را اضافه کرده‌ایم) ضریب تعیین را با $R_{xz}^2$ نشان دهیم، رابطه بین $R^2$ ها عبارت است از[1]:

$$R_{xz}^2 = R_x^2 + (1-R_x^2)r_{yz.x}^2 \qquad (۳-۱۳)$$

که $r_{yz.x}^2$ ضریب همبستگی جزئی بین $Y$ و $Z$ است. بنابراین $R_{xz}^2 \geq R_x^2$ می‌باشد.

اما هر متغیر جدیدی که به مدل اضافه می‌شود از یک طرف $R^2$ را افزایش و از طرف دیگر درجه آزادی را کاهش می‌دهد. به همین منظور از معیار دیگری به‌نام «$R^2$ تعدیل‌شده» استفاده می‌شود که آن را با $\overline{R}^2$ نشان می‌دهند. در محاسبهٔ $\overline{R}^2$ اثر تعداد پارامترهای برآوردشده، تعدیل می‌شود به‌گونه‌ای که به‌جای تغییرات کل، از متوسط تغییرات استفاده می‌شود. بدیهی است که الزاماً $\overline{R}^2 \leq R^2$ است. همچنین ثابت می‌شود که برای هر متغیر جدیدی که به مدل اضافه می‌شود، اگر قدر مطلق $t$ مربوطه، بزرگتر از ۱ باشد موجب افزایش $\overline{R}^2$ می‌شود. برای محاسبه $\sigma^2$، $R^2$ و $\overline{R}^2$ از روابط زیر می‌توان استفاده نمود که تا حدود زیادی مشابه با رگرسیون ساده می‌باشد:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{n-K} = \frac{\sum e_i^2}{n-K} = \frac{RSS}{n-K} \qquad (۳-۱۴)$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1-\frac{RSS}{TSS}$$

$$\overline{R}^2 = 1-\frac{RSS/(n-K)}{TSS/(n-1)} = 1-\frac{n-1}{n-K}\frac{RSS}{TSS} = 1-\frac{n-1}{n-K}(1-R^2) \qquad (۳-۱۵)$$

$$TSS = \sum y_i^2$$

$$ESS = \hat{\beta}_1\sum x_{1i}y_i + \hat{\beta}_2\sum x_{2i}y_i \qquad (۳-۱۶)$$

$$RSS = TSS - ESS$$

به خاطر تخمین $K$ پارامتر، درجه آزادی برابر با $n-K$ است که در اینجا $K=3$ است.

**مثال۲-۳:** در مثال ۱-۳ خطای معادله رگرسیون و ضریب تعیین را حساب کنید.

[1] Green, 2003, p. 34

$$TSS=\sum y_i^2=800$$
$$ESS=\hat{\beta}_1\sum x_{1i}y_i+\hat{\beta}_2\sum x_{2i}y_i$$
$$=(0/8960.5)(576)+(0/042530)(6040)=773/006$$
$$RSS=800-773/006=26/994$$
$$\hat{\sigma}^2=\frac{RSS}{n-3}=\frac{26/994}{20-3}=0/999778$$
$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{773/006}{800}=0/9663$$
$$\bar{R}^2=1-\frac{n-1}{n-k}(1-R^2)=1-\frac{20-1}{20-3}(1-0/9663)=0/9622$$

### ۳-۵ معیارهای اطلاعات[1]

در محاسبه $\bar{R}^2$ دیدیم که این معیار در خصوص افزودن یک متغیر توضیحی مورد استفاده قرار گیرد، زیرا افزودن یک متغیر اضافی، از یک طرف $RSS$ را کاهش و از طرف دیگر درجه آزادی را کاهش می‌دهد. در واقع نفع و ضرر حاصل از افزودن یک متغیر را لحاظ می‌کند. مشابه این، معیارهای دیگری معرفی شده‌اند که معروف به معیار اطلاعات هستند. این معیارها نیز نفع و ضرر حاصل از افزودن یک یا چند متغیر را لحاظ می‌کنند. بدین معنی که هم نفع حاصل از کاهش $RSS$ و هم زیان حاصل از کاهش درجه آزادی (افزایش $K$) را در نظر می‌گیرند. این معیارها شامل معیار اطلاعات آکائیک ($AIC$)، معیار اطلاعات بیزین شوارتز ($SIC$) و معیار اطلاعات حنان- کوئین ($HQIC$) می‌باشند:

$$AIC=\ln\hat{\sigma}^2+\frac{2K}{n}$$
$$SIC=\ln\hat{\sigma}^2+\frac{K}{n}(\ln n) \qquad (3-17)$$
$$HQIC=\ln\hat{\sigma}^2+\frac{2K}{n}\ln(\ln n)$$

که $\hat{\sigma}^2=\frac{RSS}{n}$ می‌باشد. افزودن یک متغیر توضیحی به مدل موجب افزایش جمله اول (از طریق افزایش $K$) و موجب کاهش جمله دوم (از طریق کاهش $\hat{\sigma}^2$) می‌شود. بنابراین، هر چقدر معیارهای اطلاعات کمتر شوند، معیار بهتری برای انتخاب مدل است. در هر سه معیار، جمله اول شامل ضریبی از $\frac{K}{n}$ است. این ضریب در معیار آکائیک کمتر از بقیه است، در حالی که در معیار

[1] Information criteria

حنان- کوئین بیشتر می‌باشد. در واقع معیار حنان- کوئین وزن بیشتری به $\frac{K}{n}$ می‌دهد و لذا جریمه بیشتری را به‌خاطر ورود یک متغیر در نظر می‌گیرد.

**معیارهای اطلاعات در Eviews**

هر معادله‌ای که با Eviews که تخمین می‌زنیم، خروجی آن هر سه معیار اطلاعات را ارائه می‌دهد. با مراجعه به جدول نتایج تخمین، مقدار معیارهای اطلاعات را می‌توان مشاهده نمود. اگر یک یا چند متغیر به مدل اضافه کنیم، آنگاه مقدار معیارهای اطلاعات تغییر خواهد کرد. اگر افزودن یک متغیر باعث کاهش معیار اطلاعات شود، در این صورت این متغیر را نگه می‌داریم و در غیر این صورت آن را کنار می‌گذاریم.

## ۳-۶ آزمون معنی‌دار بودن ضرایب معادله رگرسیون

مشابه رگرسیون یک متغیره، برای هر یک از ضرایب معادله رگرسیون می‌توان آزمون معنی‌دار بودن را انجام داد. همان طور که در رگرسیون یک متغیره دیدیم، اگر تعداد مشاهدات زیاد باشد، در صورتی که برای هر یک از ضرایب $|t| \geq ۲$ باشد، آن ضریب در سطح ۵ درصد معنی‌دار است. ولی برای نمونه‌هایی که حجم آنها تقریباً کمتر از ۲۰ باشد بایستی مقدار $t$ را با عدد بحرانی ($t$ جدول) مقایسه کنیم. مقدار $t$ از تقسیم ضریب موردنظر (یعنی $\hat{\beta}_i$) به انحراف معیار آن (یعنی $SE(\hat{\beta}_i)=\sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_i)}$) به‌دست می‌آید. معمولاً برای سادگی، مقادیر $t$ را داخل پرانتز و در زیر هر یک از ضرایب معادله رگرسیون می‌نویسند.

**مثال ۳-۳:** در مثال ۲-۳ معنی‌دار بودن ضرایب رگرسیون را بررسی کنید:

ابتدا واریانس $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}_۱$ و $\hat{\beta}_۲$ را طبق روابط ۱۱-۳ حساب می‌کنیم:

$$r_{۱۲}^{۲}=\frac{(۴۴۰۰)^{۲}}{(۴۳۴)(۴۹۳۲۰)}=۰/۹۰۴۴۶۷$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_۱)=\frac{۰/۹۹۹۷۷۸}{(۱-۰/۹۰۴۴۶۷)(۴۳۴)}=۰/۰۲۴۱۱۴ \quad , \quad SE(\hat{\beta}_۱)=۰/۱۵۵۳$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_۲)=\frac{۰/۹۹۹۷۷۸}{(۱-۰/۹۰۴۴۶۷)(۴۹۳۲۰)}=۰/۰۰۰۲۱۲ \quad , \quad SE(\hat{\beta}_۲)=۰/۰۱۴۵۶۷$$

$$\text{var}(\hat{\alpha})=۰/۹۹۹۷۷۸\left(\frac{۱}{۲۰}+\frac{(۹)^{۲}(۴۹۳۲۰)+(۱۸۶)^{۲}(۴۳۴)-۲(۹)(۱۸۶)(۴۴۰۰)}{(۱-۰/۹۰۴۴۶۷)(۴۳۴)(۴۹۳۲۰)}\right)$$

$$=۲/۰۹۶۳۲۹$$

$$\hat{Y}_i = ۴/۷۹۱۲ + ۰/۸۹۶۰۵X_{۱i} + ۰/۰۴۲۵۳X_{۲i} \qquad R^۲ = ۰/۹۶۶۲$$
$$(۳/۳۱) \quad (۵/۷۷) \qquad (۲/۹۲) \qquad \bar{R}^۲ = ۰/۹۶۲۲$$

چون برای هر یک از ضرایب، قدر مطلق $t$ از عدد بحرانی (یعنی۲/۰۸۶) بزرگتر است، همه ضرایب معنی‌دار هستند.

## ۳-۷ آزمون معنی‌دار بودن معادله رگرسیون (تحلیل واریانس)

تحلیل واریانس نشان می‌دهد که آیا کل معادله رگرسیون معنی‌دار است یا خیر. به عبارت دیگر آیا تغییرات توضیح داده شده توسط متغیرهای توضیحی در مقایسه با تغییرات توضیح داده نشده (یعنی خطاها) معنی‌دار می‌باشد یا نه. مشابه رگرسیون یک متغیره، می‌توان این آزمون را با $F$ انجام داد که بحث آن دقیقاً مشابه مبحث تحلیل واریانس است که در فصل دوم بررسی شد. بدین منظور بایستی فرضیه $H_۰ : \beta_۱ = \beta_۲ = ۰$ را آزمون کنیم.

$$F = \frac{S_E^۲}{S_R^۲} = \frac{S_E^۲}{\hat{\sigma}^۲} = \frac{ESS/(K-۱)}{RSS/(n-K)}$$
$$= \frac{n-K}{K-۱}\frac{ESS}{RSS} = \frac{n-K}{K-۱}\frac{R^۲}{۱-R^۲} \qquad (۳-۱۸)$$

توجه شود که در اینجا $K$ تعداد ضرایب تخمینی است که برابر با ۳ می‌باشد. هرگاه مقدار $F$ از مقدار بحرانیِ آن بزرگتر باشد (یعنی $F \geq F_{\alpha,k-۱,n-K}$) بدین معنی است که فرضیه $H_۰$ رد می‌شود و رگرسیون معنادار است. بدیهی است که هرچه $R^۲$ بزرگتر باشد، $F$ نیز بزرگتر خواهد شد.

**مثال ۳-٤:** در مثال ۳-۳ معنی‌دار بودن معادله رگرسیون را انجام دهید.

بدین منظور فرضیه زیر را آزمون می‌کنیم:

$$H_۰ : \beta_۱ = \beta_۲ = ۰$$
$$H_۱ : \beta_i \neq ۰ \qquad i = ۱,۲$$

مقدار $F$ برابر است با:

$$F = \frac{n-K}{K-۱}\frac{ESS}{RSS} = \frac{۲۰-۳}{۳-۱} \times \frac{۷۷۲/۹۸۱۷}{۲۷/۰۱۸۳} = ۲۴۳/۴۱$$

مقدار بحرانی $F$ نیز برابر است با:

$$F_{\alpha,k-۱,n-K} = F_{۰/۰۵,۲,۱۷} = ۳/۵ \Rightarrow (F \geq ۳/۵)$$

چون مقدار $F$ در ناحیه بحرانی قرار دارد، لذا فرضیه $H_0$ رد می‌شود و رگرسیون معنی‌دار است.

## ۳-۸ تحلیل نتایج رگرسیون دو متغیره

فرض کنید معادله رگرسیون به‌صورت زیر باشد:

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i \qquad (۳-۱۹)$$

$\beta_1$ تأثیر $X_1$ بر $Y$ است و نشان می‌دهد که اگر $X_1$ یک واحد تغییر کند، $Y$ به اندازه $\beta_1$ تغییر خواهد کرد. حال فرض کنید به‌جای (۳-۱۹) به اشتباه معادله زیر را برآورد کنیم:

$$Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + \varepsilon_{1i} \qquad (۳-۲۰)$$

$b_1$ تأثیر $X_1$ بر $Y$ است و $\varepsilon_{1i}$ جملهٔ اخلال را نشان می‌دهد. اما سؤال این است که چه تفاوتی بین $b_1$ و $\beta_1$ است.

توجه داریم که $\hat{\beta}_1$ تخمین‌زنندهٔ نااریب (بدون تورش) از $\beta_1$ می‌باشد. در حالی که ما به‌جای آن $\hat{b}_1$ را برآورد نموده‌ایم که $\hat{b}_1$ برآوردکنندهٔ $b_1$ است نه $\beta_1$. می‌توان نشان داد که $\hat{b}_1$ و $\hat{\beta}_1$ با هم برابر نیستند. فقط در یک حالت این دو برابرند و آن زمانی است که $X_1$ و $X_2$ هیچ ارتباطی با هم نداشته باشند و ضریب همبستگی آنها ($r_{12}$) صفر باشد. اما عملاً چنین نیست و ضریب همبستگی $X_1$ و $X_2$ معمولاً مخالف صفر است. بدین منظور معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$X_{2i} = B_0 + B_1 X_{1i} + \varepsilon_{2i} \qquad (۳-۲۱)$$

ضریب $B_1$ بیانگر اثر $X_1$ بر $X_2$ است. اگر $X_1$ و $X_2$ کاملاً مستقل باشند، آنگاه $B_1$ برابر صفر خواهد بود و در این صورت $b_1$ و $\beta_1$ نیز برابرند.

حال(۳-۲۱) را در(۳-۱۹) جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 (B_0 + B_1 X_{1i} + \varepsilon_{2i}) + u_i \\ &= (\alpha + \beta_2 B_0) + (\beta_1 + \beta_2 B_1) X_{1i} + (u_i + \beta_2 \varepsilon_{2i}) \end{aligned} \qquad (۳-۲۲)$$

مقایسه (۳-۲۲) با (۳-۲۰) نشان می‌دهد که $b_0 = \alpha + \beta_2 B_0$، $b_1 = \beta_1 + \beta_2 B_1$ و $\varepsilon_{1i} = u_i + \beta_2 \varepsilon_{2i}$ است. بنابراین وقتی معادله (۳-۲۰) را به‌جای معادله (۳-۱۹) برآورد کنیم به این معنی است که به‌جای $\beta_1$، ضریب $b_1$ را برآورد نموده‌ایم که قطعاً با $\beta_1$ برابر نیست:

$$b_1 = \beta_1 + \beta_2 B_1 \qquad (۳-۲۳)$$

حال تفسیر $b_1$ چگونه است. $b_1$ شامل دو اثر است: یکی اثر $X_1$ بر $Y$ با ثابت نگه داشتن $X_2$ که معادل با $\beta_1$ می‌باشد. دیگری تأثیر غیرمستقیم $X_1$ بر $Y$ است که از طریق تأثیر $X_1$ بر $X_2$ روی $Y$ اعمال می‌شود و برابر با $\beta_2 B_1$ می‌باشد. لذا $b_1$ را می‌توان اثر ناخالص $X_1$ بر $Y$ دانست:

$$\underbrace{\text{اثرغیرمستقیم } X_1 \text{ از طریق } X_2 \text{ بر } Y}_{\beta_2 B_1} + \underbrace{\text{اثر خالص یا مستقیم } X_1 \text{ بر } Y}_{\beta_1} = \underbrace{\text{اثرناخالص } X_1 \text{ بر } Y}_{b_1} \qquad (۳-۲۴)$$

بنابراین اگر مدل واقعی به‌صورت (۱۹-۳) باشد و ما به اشتباه $X_2$ را از معادله حذف کنیم و معادله (۲۰-۳) برآورد نمائیم. در این صورت اثر $X_1$ بر $Y$ را به‌صورت غیر واقعی برآورد نموده‌ایم که مقدار خطا برابر با $\beta_2 B_1$ است. به عبارت دیگر، $b_1$ اثر $X_1$ بر $Y$ بدون ثابت نگه‌داشتن $X_2$ است و $\beta_1$ اثر $X_1$ بر $Y$ با ثابت نگه‌داشتن $X_2$ می‌باشد.

**مثال ۵-۳:** در مثال ۱-۳ اثر ناخالص، مستقیم و غیرمستقیم $X_1$ بر $Y$ را به‌دست آورید.

در اینجا باید $b_1 = \beta_1 + \beta_2 B_1$ را برآورد نماییم. اثر ناخالص $X_1$ بر $Y$ از معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{Y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X_{1i}$$

$$\hat{b}_1 = \frac{\sum x_{1i} y_i}{\sum x_{1i}^2} = \frac{۵۷۶}{۴۳۴} = ۱/۳۲۷۲$$

$$\hat{b}_0 = \overline{Y} - \hat{b}_1 \overline{X}_1 = ۲۰ - (۱/۳۲۷۲)(۹) = ۸/۰۵۵۳$$

$$\hat{Y}_i = ۱/۳۲۷۲ + ۸/۰۵۵۳ X_{1i}$$

اثر خالص $X_1$ بر $Y$ در مثال ۱-۳ برابر با $\hat{\beta}_1 = ۰/۸۹۶۰۵$ به‌دست آمد. از طرف دیگر برای تعیین $B_1$ داریم:

$$\hat{X}_{2i} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \hat{X}_{1i}$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_{1i} x_{2i}}{\sum x_{1i}^2} = \frac{۴۴۰۰}{۴۳۴} = ۱۰/۱۳۸۲$$

$$\hat{B}_0 = \overline{X}_2 - \hat{B}_1 \overline{X}_1 = ۱۶۸ - (۱۰/۱۳۸۲)(۹) = ۷۶/۷۵۵۸$$

$$\hat{X}_{2i} = ۷۶/۷۵۵۸ + ۱۰/۱۳۸۲ X_{1i}$$

بنابراین اثر ناخالص (کل) $X_1$ بر $Y$ برابر با $\hat{b}_1$=۱/۳۳۷۲ و اثر خالص برابر با $\hat{\beta}_1$=۰/۸۹۶۰۵ و اثر غیر مستقیم برابر با $\hat{\beta}_2\hat{B}_1 = (۰/۰۴۲۵۳)(۱۰/۱۳۸۲) = ۰/۴۳۱۲$ می‌باشد.

نتایج فوق را می‌توان با استفاده از معادله (۹-۳) نیز به‌دست آورد. بدین منظور $\hat{\beta}_1$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sum x_{1i}y_i - \hat{\beta}_1\sum x_{1i}^2 - \hat{\beta}_2\sum x_{1i}x_{2i} = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_{1i}y_i}{\sum x_{1i}^2} - \hat{\beta}_2\frac{\sum x_{1i}x_{2i}}{\sum x_{1i}^2}$$

ملاحظه می‌شود که در فرمول فوق، $\hat{b}_1 = \frac{\sum x_{1i}y_i}{\sum x_{1i}^2}$ و $\hat{B}_1 = \frac{\sum x_{1i}x_{2i}}{\sum x_{1i}^2}$ و لذا $\hat{\beta}_1$ برابر است با:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{b}_1 - \hat{\beta}_2\hat{B}_1$$

طبق رابطه فوق، اثر خالص $X_1$ بر $Y$، یعنی $(\hat{\beta}_1)$ برابر با اثر ناخالص $(\hat{b}_1)$ منهای اثر $X_1$ بر $Y$ از طریق $X_2$ می‌باشد.

### ۹-۳ تحلیل همبستگی چندمتغیره

ضرایب همبستگی بیانگر روابط خطی بین متغیرها هستند. به‌عنوان مثال در رگرسیون دو متغیره، $r_{12}$ ضریب همبستگی بین $X_1$ و $X_2$ را نشان می‌دهد. ضریب همبستگی بین $X_1$ و $Y$ را با $r_{1y}$ و بین $X_2$ و $Y$ را با $r_{2y}$ نشان می‌دهیم. هر یک از این ضرایب همبستگی را با استفاده از فرمول «ضریب همبستگی ساده» می‌توان محاسبه نمود.

حال با توجه به اینکه ۳ متغیر $X_1$، $X_2$ و $Y$ را داریم، تا چه اندازه $r_{1y}$ بیانگر همبستگی واقعی بین $X_1$ و $Y$ است. در حالی که $X_2$ نیز با هر دو متغیرها همبستگی دارد. این بحث دقیقاً مشابه آن چیزی است که در رابطه با رگرسیون و اثر واقعی $X_1$ بر $Y$ بررسی نمودیم.

$r_{1y}$ بیانگر همبستگی بین $X_1$ و $Y$ در حالتی است که هیچ توجهی به $X_2$ نداشته باشیم. در واقع به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که $X_2$ ثابت است، در حالی که چنین نیست. بنابراین $r_{1y}$ تصویر غیرواقعی از همبستگی بین $X_1$ و $Y$ را ارائه می‌دهد. بدین ترتیب لازم است که اثر $X_2$ را به‌طور کامل حذف کنیم تا بدین ترتیب بتوان همبستگی واقعی بین $X_1$ و $Y$ را به‌دست آورد. این ضریب

همبستگی را «ضریب همبستگی جزئی» بین $X_1$ و $Y$ می‌گوییم که با $r_{1y.2}$ نشان می‌دهیم که به معنی «ضریب همبستگی بین $X_1$ و $Y$ با ثابت نگه داشتن $X_2$» است.

$r_{1y.2}$: ضریب همبستگی جزئی بین $X_1$ و $Y$ با ثابت نگه داشتن $X_2$

$r_{2y.1}$: ضریب همبستگی جزئی بین $X_2$ و $Y$ با ثابت نگه داشتن $X_1$

$r_{12.y}$: ضریب همبستگی جزئی بین $X_1$ و $X_2$ با ثابت نگه داشتن $Y$

برای محاسبه «ضرایب همبستگی جزئی» روابط نسبتاً ساده‌ای وجود دارد که آنها را می‌توان بر حسب «ضرایب همبستگی ساده» بیان نمود.

$$r_{1y.2} = \frac{r_{1y} - r_{2y}r_{12}}{\sqrt{\left(1-r_{2y}^2\right)\left(1-r_{12}^2\right)}}$$

$$r_{2y.1} = \frac{r_{2y} - r_{1y}r_{12}}{\sqrt{\left(1-r_{1y}^2\right)\left(1-r_{12}^2\right)}} \qquad (۳-۲۵)$$

$$r_{12.y} = \frac{r_{12} - r_{1y}r_{2y}}{\sqrt{\left(1-r_{1y}^2\right)\left(1-r_{2y}^2\right)}}$$

تفسیر ضرایب همبستگی جزئی را می‌توان با استفاده از روابط (۲۵-۳) ارائه نمود. به‌عنوان مثال در ضریب همبستگی جزئی $r_{1y.2}$ حتی اگر ضریب همبستگی ساده صفر باشد ($r_{1y}=0$)، ضریب همبستگی جزئی $r_{1y.2}$ صفر نخواهد بود، زیرا:

$$r_{1y}=0 \Rightarrow r_{1y.2} = -\frac{r_{2y}r_{12}}{\sqrt{(1-r_{2y}^2)(1-r_{12}^2)}}$$

فقط در صورتی ضریب همبستگی جزئی صفر می‌شود که $r_{12}$ یا $r_{2y}$ نیز صفر شود، یعنی $X_1$ با $X_2$ و همچنین $Y$ با $X_2$ رابطه‌ای نداشته باشد.

حال اگر $r_{12}=0$ باشد در این صورت همبستگی جزئی بین $X_1$ و $Y$ به‌صورت زیر است:

$$r_{12}=0 \quad \Rightarrow \quad r_{1y.2} = \frac{r_{1y}}{\sqrt{1-r_{2y}^2}}$$

اگر علاوه بر $r_{12}=0$، ضریب همبستگی ساده بین $X_2$ و $Y$ نیز صفر باشد ($r_{2y}=0$)، در این صورت ضریب همبستگی جزئی و ضریب همبستگی ساده برابر خواهند بود:

$$r_{12} = r_{2y} = 0 \Rightarrow r_{1y.2} = r_{1y}$$

اما بین ضریب تعیین و ضرایب همبستگی نیز روابطی وجود دارد که عبارتند از:

$$R^2 = \frac{r_{1y}^2 + r_{2y}^2 - 2r_{1y}r_{2y}r_{12}}{1 - r_{12}^2} \qquad (۳-۲۶)$$

$$= r_{1y}^2 + (1 - r_{12}^2)r_{2y.1}^2 = r_{2y}^2 + (1 - r_{2y}^2)r_{1y.2}^2$$

**مثال ۶-۳:** در مثال ۱-۳ ضرایب همبستگی ساده و جزئی ر حساب کنید:

ضرایب همبستگی ساده عبارتند از:

$$r_{12} = \frac{4400}{\sqrt{(434)(49320)}} = 0/951 \qquad r_{12}^2 = 0/904$$

$$r_{1y} = \frac{576}{\sqrt{(434)(800)}} = 0/977 \qquad r_{1y}^2 = 0/954$$

$$r_{2y} = \frac{6040}{\sqrt{(49320)(800)}} = 0/962 \qquad r_{2y}^2 = 0/925$$

و ضرایب همبستگی جزئی، طبق روابط (۶۳-۲۰) عبارتند از:

$$r_{1y.2} = \frac{0/977 - (0/962)(0/951)}{\sqrt{(1 - 0/925)(1 - 0/904)}} = 0/736$$

$$r_{2y.1} = \frac{0/962 - (0/977)(0/951)}{\sqrt{(1 - 0/954)(1 - 0/904)}} = 0/498$$

$$r_{12.y} = \frac{0/951 - (0/977)(0/962)}{\sqrt{(1 - 0/954)(1 - 0/925)}} = 0/191$$

## ۳-۱۰ مدل Kمتغیره

در حالت کلی معادله زیر را در نظر بگیرید که دارای $K$ متغیر توضیحی می‌باشد:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_K X_{Ki} + u_i \qquad (۳-۲۷)$$

در این معادله $\beta_1$ عرض از مبدأ می‌باشد که در واقع ضریب متغیر $X_1$ است و $X_1$ نیز برداری با عناصر واحد می‌باشد. حال مدل فوق را به‌صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{K1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{K2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{Kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad (۳-۲۸)$$

بنابراین مدل (۳-۲۸) به‌طور خلاصه عبارت است از:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u} \qquad (۳-۲۹)$$

$\mathbf{y}$ و $\mathbf{u}$ بردارهای ستونی با ابعاد $n\times 1$ هستند. $\mathbf{X}$ ماتریس $n\times K$ و $\boldsymbol{\beta}$ بردار ستونی $K\times 1$ می‌باشد. در اینجا نیز بایستی $\boldsymbol{\beta}$ به‌گونه‌ای برآورد شود که که مجموع مجذور خطا ($RSS$) حداقل شود:

$$RSS = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \mathbf{e}'\mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{e} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$\mathbf{e}$ بردار ستونی خطاها و $\mathbf{e}'$ ترانسپوز آن می‌باشد. با جایگذاری به‌جای $\mathbf{e}$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} RSS &= \mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned} \qquad (۳-۳۰)$$

برای حداقل شدن $\mathbf{e}'\mathbf{e}$، نسبت به $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial \mathbf{e}'\mathbf{e}}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\hat{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{X}'\mathbf{X} = \mathbf{o} \qquad (۳-۳۱)$$

با حل این معادله، $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ به‌دست می‌آید:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}) \qquad (۳-۳۲)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ تخمین‌زنندهٔ OLS برای $\boldsymbol{\beta}$ است. این تخمین‌زننده چون تابع خطی از $\mathbf{u}$ است، لذا دارای امید ریاضی $\boldsymbol{\beta}$ و واریانس $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ می‌باشد. بدین منظور ابتدا به‌جای $Y$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X\beta} + \mathbf{u}) \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \end{aligned}$$

امید ریاضی $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E\left(\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\right) \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\beta} \quad , \quad E(\mathbf{u}) = \mathbf{o} \end{aligned}$$

واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'] \\ &= E\left\{[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}][(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}]'\right\} \\ &= E\left\{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right\} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\end{aligned}$$

$E(\mathbf{u}\mathbf{u}')$ ماتریس واریانس-کوواریانس $\mathbf{u}$ است که آن را با $\boldsymbol{\Sigma}$ نشان می‌دهیم:

$$E(\mathbf{u}\mathbf{u}') = \boldsymbol{\Sigma} = E\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_1u_2 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1u_n & u_2u_n & \cdots & u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2\mathbf{I}_n$$

زیرا $E(u_i^2)=\sigma^2$ و $E(u_iu_j)=0$ است. بنابراین، واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\sigma^2\mathbf{I}_n)\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\end{aligned} \tag{۳-۳۳}$$

بدین ترتیب واریانس $\hat{\beta}_k$ برابر با حاصل‌ضرب $\sigma^2$ در عنصر $k$ام قطر اصلی ماتریس $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ می‌باشد. سایر عناصر نیز کوواریانس بین ضرایب را نشان می‌دهد. به‌طور کلی، ماتریس $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ را ماتریس واریانس- کوواریانس ضرایب می‌گویند.

ماهیت این ماتریس در مثال ۷-۳ نشان داده شده است. از آنجا که $\sigma^2$ مجهول است، لذا از تخمین آن استفاده می‌کنیم که برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-K} = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-K} \tag{۳-۳۴}$$

$n-K$ برابر با درجه آزادی است، زیرا $K$ پارامتر را برآورد کرده‌ایم.

**مثال ۷-۳:** فرض کنید که بر اساس داده‌های ۱۵ سال برای سه متغیر $Y$، $X_2$ و $X_3$ مقادیر زیر به‌دست آمده است:

$$(\mathbf{XX}')^{-1}=\begin{bmatrix} ۲/۰ & ۳/۵ & -۱/۰ \\ ۳/۵ & ۱/۰ & ۶/۵ \\ -۱/۰ & ۶/۵ & ۴/۳ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{y}=\begin{bmatrix} -۳/۰ \\ ۲/۲ \\ ۰/۶ \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}'\mathbf{e}=۱۰/۹۶$$

بر اساس این مشاهدات، $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برابر است با:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y})=\begin{bmatrix} ۱/۱ \\ -۴/۴ \\ ۱۹/۸۸ \end{bmatrix}$$

تخمین واریانس $u$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-K}=\frac{۱۰/۹۶}{۱۵-۳}=۰/۹۱$$

بنابراین، واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ عبارت است از:

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}=۰/۹۱\begin{bmatrix} ۲/۰ & ۳/۵ & -۱/۰ \\ ۳/۵ & ۱/۰ & ۶/۵ \\ -۱/۰ & ۶/۵ & ۴/۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۱/۸۲ & ۳/۱۹ & -۰/۹۱ \\ ۳/۱۹ & ۰/۹۱ & ۵/۹۲ \\ -۰/۹۱ & ۵/۹۲ & ۳/۹۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_3) \\ \mathrm{cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1) & \mathrm{var}(\hat{\beta}_2) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3) \\ \mathrm{cov}(\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_1) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_2) & \mathrm{var}(\hat{\beta}_3) \end{bmatrix}$$

بدین ترتیب واریانس ضرایب عبارت است از:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)=۱/۸۲ \;,\; \mathrm{var}(\hat{\beta}_2)=۰/۹۱ \;,\; \mathrm{var}(\hat{\beta}_3)=۳/۹۱$$

معادله رگرسیون عبارت است از:

$$\hat{Y}_i=۱/۱۰-۴/۴۰X_{2i}+۱۹/۸۸X_{3i}$$
$$(۰/۸۱)\;(-۴/۶)\quad(۱۰/۰۵)$$

**برآورد رگرسیون چند متغیره با Eviews** فایل data3

برای برآورد معادله رگرسیون، مشابه رگرسیون یک متغیره می‌توان عمل نمود. در پنجره فرمان، معادله مورد نظر را به‌صورت LS Y C X1 X2 وارد می‌کنیم. در اینجا Y متغیر وابسته، C عرض از مبدأ و X1 و X2 متغیرهای توضیحی هستند. بعد از وارد نمودن عبارت مذکور، با زدن کلید Enter نتایج تخمین در پنجره Equation ارائه می‌شود. تمامی نتایج مشابه رگرسیون یک متغیره می‌باشد.

فرض کنید که می‌خواهیم رگرسیون سرمایه‌گذاری (I) را روی نرخ بهره حقیقی (RR)، تغییرات درآمد ملی بدون نفت (dY) و سرمایه‌گذار در سال قبل(I(-۱ برآورد کنیم، بدین منظور از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

LS I C RR dY I(-1)

با زدن کلید Enter نتایج به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA5::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: I
Method: Least Squares
Date: 09/23/11 Time: 19:17
Sample (adjusted): 1352 1386
Included observations: 35 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 5742.205 | 5095.942 | 1.126819 | 0.2685 |
| RR | -246.7890 | 200.1556 | -1.232986 | 0.2268 |
| DYNO | 1.187917 | 0.158345 | 7.502104 | 0.0000 |
| I(-1) | 0.819486 | 0.052327 | 15.66052 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.947025 | Mean dependent var | 90623.63 |
| Adjusted R-squared | 0.941899 | S.D. dependent var | 35779.97 |
| S.E. of regression | 8624.471 | Akaike info criterion | 21.06981 |
| Sum squared resid | 2.31E+09 | Schwarz criterion | 21.24756 |
| Log likelihood | -364.7216 | Hannan-Quinn criter. | 21.13117 |
| F-statistic | 184.7287 | Durbin-Watson stat | 1.655497 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

جدول فوق نشان می‌دهد که عرض از مبدأ، معنادار نیست زیرا برای آن $t = ۱/۱۲$ است. ضریب نرخ بهره حقیقی برابر با ۲۴۶/۸- است که علامت منفی دارد و مطابق با تئوری است، اما از لحاظ آماری معنادار نیست. ضریب تغییرات درآمد ملی، هم مثبت و هم معنادار است. متغیر سرمایه‌گذاری تأخیری نیز دارای ضریب مثبت و معنادار است. $R^۲$ برابر با ۰/۹۴۷ و $\bar{R}^۲$ نیز برابر با ۰/۹۴۲ می‌باشد. مقدار F نیز برابر با ۱۸۴/۷ است که کاملاً معنادار می‌باشد.

ماتریس $X'X$ نقش مهمی در برآورد β دارد. برای بررسی خواص ماتریس $X'X$، ابتدا متغیرها را بر حسب انحراف از میانگین می‌نویسیم. بدین منظور معادله (۳-۲۷) را جمع زده و بر n تقسیم می‌کنیم:

$$\sum Y_i = n\beta_۱ + \beta_۲\sum X_{۲i} + \ldots + \beta_K\sum X_{Ki} + \sum u_i$$

$$\bar{Y} = \beta_۱ + \beta_۲\bar{X}_۲ + \ldots + \beta_K\bar{X}_K + \bar{u} \qquad (۳-۳۵)$$

حال معادله فوق را از (۲۷-۳) کم می‌کنیم:

$$Y_i - \overline{Y} = \beta_2(X_{2i} - \overline{X}_2) + \ldots + \beta_K(X_{Ki} - \overline{X}_K) + (u_i - \overline{u})$$

متغیرهایی را که بر حسب انحراف از میانگین هستند با حروف کوچک نشان می‌دهیم:

$$y_i = \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_K x_{Ki} + v_i \qquad (۳-۲۷')$$

شکل ماتریسی معادله فوق عبارت است از (مشابه معادله ۲۹-۳):

$$\mathbf{y}_* = \mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta}_* + \mathbf{v} \qquad (۳-۲۹')$$

$\boldsymbol{\beta}_*$ یک بردار $(K-1)\times 1$ و $\mathbf{X}_*$ نیز $n\times(K-1)$ می‌باشد که شامل داده‌های $x_2$ تا $x_K$ است. در اینجا نیز مجموع مجذور خطاها $(\mathbf{e}'\mathbf{e})$ را حساب کرده و با مشتق‌گیری نسبت به $\hat{\boldsymbol{\beta}}_*$، تخمین پارامترها را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{e} = \mathbf{y}_* - \hat{\mathbf{y}}_* = \mathbf{y}_* - \mathbf{X}_*\hat{\boldsymbol{\beta}}_*$$

$$\mathbf{e}'\mathbf{e} = (\mathbf{y}_* - \mathbf{X}_*\hat{\boldsymbol{\beta}}_*)'(\mathbf{y}_* - \mathbf{X}_*\hat{\boldsymbol{\beta}}_*) = \mathbf{y}'_*\mathbf{y}_* - 2\mathbf{y}'_*\mathbf{X}_*\hat{\boldsymbol{\beta}}_* + \hat{\boldsymbol{\beta}}'_*(\mathbf{X}'_*\mathbf{X}_*)\hat{\boldsymbol{\beta}}_*$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}'\mathbf{e}}{\hat{\boldsymbol{\beta}}_*} = \mathbf{o} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}_* = (\mathbf{X}'_*\mathbf{X}_*)^{-1}\mathbf{X}'_*\mathbf{y}_* \qquad (۳-۳۳')$$

با تخمین $\hat{\boldsymbol{\beta}}_*$، تخمین $\hat{\beta}_2$ تا $\hat{\beta}_K$ به‌دست می‌آید. $\hat{\beta}_1$ نیز از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2\overline{X}_2 - \ldots - \hat{\beta}_K X_K$$

همان‌طور که اشاره شد، ماتریس $\mathbf{X}_*$ در اینجا شامل داده‌های $x_2$ تا $x_K$ می‌باشد:

$$\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} & \cdots & x_{K1} \\ x_{22} & x_{32} & \cdots & x_{K2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{2n} & x_{3n} & \cdots & x_{Kn} \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۶)$$

ماتریس $\mathbf{X}'_*\mathbf{X}_*$ عبارت است از:

$$\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} & \cdots & \sum x_{2i}x_{Ki} \\ \sum x_{3i}x_{2i} & \sum x_{3i}^2 & \cdots & \sum x_{3i}x_{Ki} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x_{Ki}x_{2i} & \sum x_{Ki}x_{3i} & \cdots & \sum x_{Ki}^2 \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۷)$$

اگر هر یک از عناصر ماتریس $\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*$ را بر $n$ تقسیم کنیم آن‌گاه ماتریسی به‌دست می‌آید که قطر اصلی آن واریانس $X$ها و سایر عناصر، کوواریانس بین $X$ها را نشان می‌دهد:

$$\frac{1}{n}\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} S_2^2 & S_{23} & \cdots & S_{2K} \\ S_{32} & S_3^2 & \cdots & S_{3K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{K2} & S_{K3} & \cdots & S_K^2 \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۸)$$

$S_i^2$ واریانس $X_i$ و $S_{ij}$ کوواریانس $X_i$ و $X_j$ می‌باشد.

حال برای سادگی، بحث را بر اساس رگرسیون دو متغیره ادامه می‌دهیم. در این صورت $\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*$ و $\mathbf{X}_*'\mathbf{y}_*$ عبارتند از:

$$\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_* = \begin{bmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{3i}x_{2i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{X}_*'\mathbf{y}_* = \begin{bmatrix} \sum x_{2i}y_i \\ \sum x_{3i}y_i \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1}$ نیز عبارت است از:

$$(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1} = \frac{1}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i}x_{3i})^2} \begin{bmatrix} \sum x_{3i}^2 & -\sum x_{2i}x_{3i} \\ -\sum x_{3i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-r_{23}^2)\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2} \begin{bmatrix} \sum x_{3i}^2 & -\sum x_{2i}x_{3i} \\ -\sum x_{3i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۹)$$

$$r_{23}^2 = \frac{(\sum x_{2i}x_{3i})^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2}$$

$r_{23}$ ضریب همبستگی $X_2$ و $X_3$ است.

براساس ماتریس $(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1}$ می‌توان سه حالت را بررسی نمود:

الف) اگر بین $X_2$ و $X_3$ رابطه خطی کامل باشد، در این صورت $r_{23}^2 = 1$ خواهد بود و لذا $(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1}$ قابل محاسبه نیست و امکان برآورد ضرایب وجود ندارد. در این حالت به‌عنوان

مثال $X_{3i} = aX_{2i}$ است، یعنی یکی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{X}_*$ ضریبی از ستون دیگر است. در این صورت ما فقط راجع به یکی از متغیرهای توضیحی دارای اطلاعات هستیم و در مورد دیگری هیچ اطلاعاتی نداریم و لذا فقط یکی از ضرایب آنها (ضریب $X_2$ یا ضریب $X_3$) قابل برآورد است. به‌عبارت دیگر اطلاعات ما برای برآورد دوضریب، کافی نیست. اگر $X_{3i} = aX_{2i}$ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 (aX_{2i}) + u_i \\ &= \beta_1 + (\beta_2 + \beta_3 a) X_{2i} + u_i \\ &= \beta_1 + \alpha_2 X_{2i} + u_i \end{aligned}$$

بنابراین فقط ضریب $X_2$ قابل برآورد است و امکان برآورد ضریب $X_3$ وجود ندارد.

ب) اگر $X_2$ و $X_3$ مستقل خطی باشند، در این صورت $r_{23}^2 = 0$ است که بدیهی است $\sum x_{2i}x_{3i} = 0$ می‌باشد. در این حالت، $(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1}$ و برآورد ضرایب $X_2$ و $X_3$ عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_* = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2} \begin{bmatrix} \sum x_{3i}^2 & 0 \\ 0 & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum x_{2i} y_i \\ \sum x_{3i} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum x_{2i} y_i}{\sum x_{2i}^2} \\ \dfrac{\sum x_{3i} y_i}{\sum x_{3i}^2} \end{bmatrix} \qquad (۳-۴۰)$$

نتایج فوق نشان می‌دهد که تخمین ضرایب $\beta_2$ و $\beta_3$ مشابه تخمین آنها در معادلات رگرسیون یک متغیره است، یعنی $\beta_2$ از معادله $Y_i = \alpha + \beta_2 X_{2i} + u_i$ و $\beta_3$ از معادله $Y_i = \alpha + \beta_3 X_{3i} + u_i$ به‌دست می‌آید.

ج) اگر $X_2$ و $X_3$ رابطه خطی غیر کامل داشته باشند به‌گونه‌ای که $0 < r_{23}^2 < 1$ باشد، در این حالت تخمین $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$ به هم وابسته هستند. بدین منظور معادلات زیر را داریم:

$$(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)\hat{\boldsymbol{\beta}}_* = \mathbf{X}_*'\mathbf{y}_* \Rightarrow \begin{bmatrix} \sum x_{2i}^2 & \sum x_{2i}x_{3i} \\ \sum x_{2i}x_{3i} & \sum x_{3i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{2i} y_i \\ \sum x_{3i} y_i \end{bmatrix} \qquad (۳-۴۱)$$

$$\hat{\beta}_2 \sum x_{2i}^2 + \hat{\beta}_3 \sum x_{2i}x_{3i} = \sum x_{2i} y_i \Rightarrow \hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_{2i} y_i}{\sum x_{2i}^2} - \frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2} \hat{\beta}_3 \qquad (۳-۴۲)$$

$$\hat{\beta}_2 \sum x_{2i}x_{3i} + \hat{\beta}_3 \sum x_{3i}^2 = \sum x_{3i} y_i \Rightarrow \hat{\beta}_3 = \frac{\sum x_{3i} y_i}{\sum x_{3i}^2} - \frac{\sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{3i}^2} \hat{\beta}_2 \qquad (۳-۴۳)$$

نتایج فوق نشان می‌دهد که تخمین هر ضریب، وابسته به دیگری است. این بدان معنا است که اثر $X_2$ بر $Y$ معادل با $\beta_2$ است که از معادله $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$ تعیین می‌شود که در آن $X_3$ وجود دارد. حال اگر $\beta_2$ را از معادله $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + u_i$ به‌دست آوریم، دارای تورش خواهد بود و با $\beta_2$ واقعی برابر نخواهد بود.

اگر از (۳-۴۳) به‌جای $\hat{\beta}_3$ در (۳-۴۲) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_{2i}^2 \sum x_{2i} y_i - \sum x_{2i} x_{3i} \sum x_{3i} y_i}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i} x_{3i})^2} \qquad (۳-۴۴)$$

رابطه (۳-۴۴) را می‌توان با توجه به تعریف $r_{23}^2$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{1 - r_{23}^2} \left( \underbrace{\frac{\sum x_{2i} y_i}{\sum x_{2i}^2}}_{\hat{b}_2} - \underbrace{\frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2}}_{\hat{\alpha}_2} \underbrace{\frac{\sum x_{3i} y_i}{\sum x_{3i}^2}}_{\hat{b}_3} \right) \qquad (۳-۴۵)$$

$\hat{b}_2$، $\hat{\alpha}_2$ و $\hat{b}_3$ به ترتیب از معادلات (۳-۴۶)، (۳-۴۷) و (۳-۴۸) به‌دست می‌آیند:

$$Y_i = b_1 + b_2 X_{2i} + u_i \qquad (۳-۴۶)$$

$$X_{3i} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \varepsilon_i \qquad (۳-۴۷)$$

$$Y_i = a_1 + b_3 X_{3i} + v_i \qquad (۳-۴۸)$$

رابطه (۳-۴۵) نشان می‌دهد که تخمین ضریب $X_2$ وابسته به رابطه $X_2$ و $X_3$ است که این وابستگی توسط ضریب همبستگی آنها (یعنی $r_{23}^2$) و همچنین توسط $\hat{\alpha}_2$ توصیف می‌شود.

### ۳-۱۱ رگرسیون مقید و تخمین‌زننده‌های مقید

به‌عنوان یک مثال ساده فرض کنید که در معادله رگرسیون $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$ با قید $\beta_2 + \beta_3 = 1$ مواجه‌ایم. این یک رگرسیون مقید است که ضرایب آن از مسئله زیر به‌دست می‌آید:

$$\min \sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{2i} - \hat{\beta}_3 X_{3i})^2 \qquad (۳-۴۹)$$
$$st. \quad \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 = 1$$

برای حل این مسئله، تابع لاگرانژ را تشکیل می‌دهیم:

$$L=\sum(Y_i-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i})^2+\lambda(1-\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3) \qquad (۳-۵۰)$$

حال نسبت به ضرایب مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
&\partial L/\partial\beta_1=-2\sum(Y_i-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i})=0\\
&\partial L/\partial\beta_2=-2\sum(Y_i-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i})X_{2i}-\lambda=0\\
&\partial L/\partial\beta_3=-2\sum(Y_i-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{2i}-\hat{\beta}_3X_{3i})X_{3i}-\lambda=0\\
&\partial L/\partial\lambda=1-\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3=0
\end{aligned} \qquad (۳-۵۱)$$

از معادله اول، $\hat{\beta}_1=\overline{Y}-\hat{\beta}_2\overline{X}_2-\hat{\beta}_3\overline{X}$ به‌دست می‌آید. به‌جای $\hat{\beta}_1$ در معادله دوم و سوم قرار داده و نتایج را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\sum(y_i-\hat{\beta}_2x_{2i}-\hat{\beta}_3x_{3i})X_{2i}-\lambda=0\\
&\sum(y_i-\hat{\beta}_2x_{2i}-\hat{\beta}_3x_{3i})X_{3i}-\lambda=0
\end{aligned} \qquad (۳-۵۲)$$

$y_i$، $x_{2i}$ و $x_{3i}$ برحسب انحراف از میانگین هستند. حال اگر به‌جای $\hat{\beta}_3$ از $\hat{\beta}_3=1-\hat{\beta}_2$ در معادلات (۳-۵۲) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\sum(y_i-\hat{\beta}_2(x_{2i}-x_{3i})-x_{3i})X_{2i}-\lambda=0\\
&\sum(y_i-\hat{\beta}_2(x_{2i}-x_{3i})-x_{3i})X_{3i}-\lambda=0
\end{aligned} \qquad (۳-۵۳)$$

با حل معادلات فوق، $\hat{\beta}_2$ به‌دست می‌آید[1]:

$$\hat{\beta}_2=\frac{\sum(x_{2i}-x_{3i})(y_i-x_{3i})}{\sum(x_{2i}-x_{3i})^2} \qquad (۳-۵۴)$$

و $\hat{\beta}_3$ نیز برابر است با:

$$\hat{\beta}_3=1-\hat{\beta}_2=\frac{\sum(x_{3i}-x_{2i})(y_i-x_{2i})}{\sum(x_{2i}-x_{3i})^2} \qquad (۳-۵۵)$$

البته می‌توان به‌جای روش فوق، ابتدا از $\beta_3=1-\beta_2$ در معادله رگرسیون قرار داده و سپس ضرایب را برآورد نمود:

---

[1] توجه شود که رابطه $\sum x_{2i}X_{2i}=\sum x_{2i}^2$ و $\sum x_{2i}X_{3i}=\sum x_{2i}x_{3i}$ برقرار است. مشابه این روابط برای سایر متغیرها نیز برقرار است.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + (1-\beta_2)X_{3i} + u_i$$
$$= \beta_1 + \beta_2(X_{2i} - X_{3i}) + X_{3i} + u_i$$

$$Y_i - X_{3i} = \beta_1 + \beta_2(X_{2i} - X_{3i}) + u_i \qquad (۳-۵۶)$$

با تخمین معادله (۳-۵۶)، تخمین‌زنندهٔ $\beta_1$ و $\beta_2$ به‌دست می‌آید که مشابه قبل است. سپس $\beta_3$ نیز از $\beta_3 = 1-\beta_2$ به‌دست می‌آید.

حال بحث فوق را در حالت کلی به‌کار می‌بریم. بدین منظور ابتدا رگرسیون و قیدها را به‌صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}$$
$$\mathbf{R\beta} = \mathbf{r} \qquad (۳-۵۷)$$

بردارهای $\mathbf{y}$، $\mathbf{u}$ و $\boldsymbol{\beta}$ و ماتریس $X$ مشابه (۳-۲۹) می‌باشند. معادله دوم، قیدها را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال می‌تواند بیانگر قید $\beta_2 + \beta_3 = 1$ باشد که به‌صورت $[1 \quad 1]\begin{bmatrix}\beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix} = 1$ نوشته می‌شود. به‌هرحال، $R$ یک ماتریس $m\times K$ و $r$ یک بردار $m\times 1$ است ($m$ تعداد قیدها است). تخمین مقید از مسئله زیر به‌دست می‌آید:

$$\min \sum e_i^2 = \mathbf{e'e} = (\mathbf{y}-\mathbf{X\hat{\beta}})'(\mathbf{y}-\mathbf{X\hat{\beta}}) = \mathbf{y'y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X'X\beta} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X'y} \qquad (۳-۵۸)$$
$$st.\ \mathbf{R\beta} = \mathbf{r}$$

با تشکیل تابع لاگرانژ و مشتق‌گیری نسبت به $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ و بردار ضرایب لاگرانژ (در اینجا $\boldsymbol{\lambda}$ بردار ستونی $m\times 1$ است) تخمین مقید ضرایب به‌دست می‌آید (ضرایب لاگرانژ را برابر با $2\boldsymbol{\lambda}$ در نظر می‌گیریم):

$$L = \mathbf{y'y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X'y} + 2\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \qquad (۳-۵۹)$$

$$\partial L/\partial\hat{\boldsymbol{\beta}} = 2\mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - 2\mathbf{X'y} - 2\mathbf{R'}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \qquad (۳-۶۰)$$

$$\partial L/\partial\boldsymbol{\lambda} = -2(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r}) = \mathbf{0} \qquad (۳-۶۱)$$

با حل معادلات (۳-۶۰) و (۳-۶۱) تخمین مقید به‌دست می‌آید که آن را با $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ نشان می‌دهیم:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR} + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R'}]^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \qquad (۳-۶۲)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ تخمین غیرمقید است.

امید ریاضی و واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ عبارت است از:

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = \boldsymbol{\beta}$$
$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} - \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \quad (۳-۶۳)$$

## ۳-۱۲ آزمون محدودیت‌ها

در برخی موارد علاوه بر آزمون معنی‌دار بودن ضرایب، لازم است آزمون‌های دیگری را در مورد ضرایب انجام دهیم. آزمون معنی‌دار بودن ضرایب که با $t$ صورت می‌گیرد به معنی آزمون فرضیه $\beta_i = ۰$ است. همچنین $F$ که در تحلیل واریانس مورد استفاده قرار می‌گیرد برای آزمون فرضیه $\beta_۲ = \beta_۳ = ... = \beta_K = ۰$ می‌باشد که به معنی آزمون معنادار بودن کل معادله رگرسیون است. علاوه بر این می‌توان فرضیه‌های دیگری نیز برای ضرایب مطرح و آزمون نمود. به‌عنوان مثال فرضیه $\beta_i = a$ که $a$ یک مقدار ثابت است. یا آزمون فرضیه $\beta_۲ + \beta_۳ = ۱$ و یا هر فرضیه دیگری راجع به ضرایب را می‌توان آزمون نمود. برخی از این فرضیه‌ها یا محدودیت‌ها نسبتاً ساده هستند که می‌توان برای آزمون آنها از $t$ استفاده نمود. به‌عنوان مثال می‌توان فرضیه $\beta_۲ = ۵$ را با استفاده از $t$ آزمون نمود:

$$t = \frac{\hat{\beta}_۲ - ۵}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_۲)}} \quad (۳-۶۴)$$

همچنین می‌توان فرضیه $\beta_۲ = \beta_۳$ را به‌صورت $\beta_۲ - \beta_۳ = ۰$ نوشت و سپس آن را با آماره $t$ آزمون نمود:

$$t = \frac{(\hat{\beta}_۲ - \hat{\beta}_۳) - ۰}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_۲ - \hat{\beta}_۳)}} \quad (۳-۶۵)$$

$\mathrm{var}(\hat{\beta}_۲ - \hat{\beta}_۳)$ برابر با $\mathrm{var}(\hat{\beta}_۲) + \mathrm{var}(\hat{\beta}_۳) - ۲\mathrm{cov}(\hat{\beta}_۲, \hat{\beta}_۳)$ است.

علاوه بر این، فرضیه $\beta_۲ + \beta_۳ = ۱$ را می‌توان با استفاده از $t$ به‌صورت زیر انجام داد:

$$t = \frac{(\hat{\beta}_۲ + \hat{\beta}_۳) - ۱}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_۲ + \hat{\beta}_۳)}} \quad (۳-۶۶)$$

$\mathrm{var}(\hat{\beta}_۲ + \hat{\beta}_۳)$ برابر با $\mathrm{var}(\hat{\beta}_۲) + \mathrm{var}(\hat{\beta}_۳) + ۲\mathrm{cov}(\hat{\beta}_۲, \hat{\beta}_۳)$ است.

روش عمومی برای آزمون محدودیت‌ها را می‌توان بر اساس آماره $F$ ارائه نمود. فرض کنید رگرسیون $K$ متغیره زیر را داریم:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \ldots + \beta_K X_{Kt} + u_t \qquad (۳-۶۷)$$

از بخش ۵-۳ به‌خاطر داریم که برای آزمون $\beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_k = 0$ از $F$ تحت عنوان تحلیل واریانس استفاده نمودیم. حال می‌توان با استفاده از $F$ هر فرضیه دیگری را که در رابطه با ضرایب باشد، آزمون نمود. بدین منظور مدل (۳-۶۷) را رگرسیون غیرمقید[1] می‌نامیم، زیرا هیچ محدودیتی روی ضرایب آن اعمال نشده است. برای این مدل، ضریب تعیین را با $R^2_{UR}$ و مجموع مجذور باقیمانده‌ها را با $RSS_{UR}$ نشان می‌دهیم. حال می‌توان هر گونه محدودیتی را روی ضرایب اعمال کرده و سپس با در نظر گرفتن این محدودیتها، مدل مذکور را مجدداً برآورد می‌کنیم که به آن رگرسیون مقید می‌گوییم. ضریب تعیین این مدل را با $R^2_R$ و مجموع مجذور باقیمانده‌ها را با $RSS_R$ نشان می‌دهیم. توجه داریم که $RSS_{UR} \le RSS_R$ است، زیرا خطاهای رگرسیون مقید،[2] بیشتر از رگرسیون غیرمقید می‌باشد. اگر تفاضل $RSS_R - RSS_{UR}$ بزرگ باشد بدان معنا است که محدودیتهای مورد نظر معنی‌دار هستند و در غیر این صورت، معنادار نیستند. در چنین شرایطی می‌توان از $F$ استفاده نمود که بیانگر معنادار بودن یا معنادار نبودن محدودیتهای مورد نظر می‌باشد. بدیهی است که اگر محدودیتهای اعمال شده واقعاً معنادار باشند، رگرسیونهای مقید و غیرمقید تفاوت قابل توجهی خواهند داشت و لذا تفاضل $RSS$ها بزرگ می‌شود که موجب بزرگ شدن $F$ شده و فرضیه $H_0$ (وجود محدودیت‌ها) رد می‌شود. در واقع بدان معنا است که این محدودیت‌ها، قدرت توضیح‌دهندگی مدل را به‌طرز محسوسی کاهش می‌دهند.

$$F = \frac{\dfrac{RSS_R - RSS_{UR}}{m}}{\dfrac{RSS_{UR}}{n-K}} = \frac{n-K}{m}\,\frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}} \qquad (۳-۶۸)$$

که $m$ تعداد محدودیت‌ها است. به‌عنوان مثال، $\beta_2 + \beta_3 = 1$ بیانگر وجود یک محدودیت است. اما فرضیه‌های $\beta_2 + \beta_3 = 1$ و $\beta_5 = \beta_6$، بیانگر وجود دو محدویت است. همچنین آزمون فرضیه

[1] Unrestricted
[2] Restricted

$\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$ بیانگر سه محدودیت است، زیرا سه محدودیت به‌صورت $\beta_2=0$، $\beta_3=0$ و $\beta_4=0$ داریم.

از آنجا که رابطه $R^2=1-\frac{RSS}{TSS}$ برقرار است، لذا می‌توان $F$ را بر حسب $R^2$ نوشت:

$$F=\frac{n-K}{m}\frac{R_{UR}^2-R_R^2}{1-R_{UR}^2} \qquad (۳-۶۹)$$

به‌جای $F$ می‌توان از $\chi^2$ نیز استفاده نمود. از آنجا که $RSS=\sum e_i^2$ را می‌توان به‌صورت $\frac{RSS}{\sigma^2}=\sum(\frac{e_i-\bar{e}}{\sigma})^2$ نوشت $(\bar{e}=0)$، لذا عبارت $\frac{e_i-\bar{e}}{\sigma}$ توزیع نرمال استاندارد و مجذور آن توزیع $\chi^2$ با درجه آزادی ۱ دارد. اما مجموع آن دارای توزیع $\chi^2$ با درجه آزادی $n-K$ است. همچنین $\frac{RSS_R}{\sigma^2}$ و $\frac{RSS_{UR}}{\sigma^2}$ نیز توزیع $\chi^2$ دارند که درجه آزادی اولی برابر با $n-(K-m)$ و دومی برابر با $n-K$ می‌باشد، زیرا در اولی فقط $K-m$ پارامتر و در دومی $K$ پارامتر را برآورد می‌کنیم. تفاضل $\frac{RSS_R-RSS_{UR}}{\sigma^2}$ نیز توزیع $\chi^2$ با درجه آزادی $[n-(K-m)]-(n-K)=m$ دارد. اگر مقدار $\chi_m^2$ بزرگ باشد، مشابه با بزرگ بودن $F$ است.[1]

در حالت کلی، برای آزمون محدودیت $R\beta=r$ نیز از نسبت $F$ استفاده می‌کنیم[2]. بدین منظور ابتدا خطاهای غیرمقید و مقید را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_{UR}&=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}\\ \mathbf{e}_R&=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R\end{aligned} \qquad (۳-۷۰)$$

خطاهای مقید را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_R&=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R+\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}\\ &=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})-\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})\\ &=\mathbf{e}_{UR}-\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})\end{aligned} \qquad (۳-۷۱)$$

حال مجموع مجذور خطاها $(RSS)$ را حساب می‌کنیم:

---

[1] این روش، معروف به آزمون والد است که جزئیات آن در فصل هفتم ارائه شده است.

[2] سایر آزمون‌ها در فصل هفتم معرفی شده‌اند.

$$RSS_R = \mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R = \mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR} + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \qquad (۳-۷۲)$$

با استفاده از معادله فوق، تفاوت بین $RSS$ های مقید و نامقید را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$RSS_R - RSS_{UR} = \mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R - \mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \qquad (۳-۷۴)$$

از $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})$ به‌جای $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ در (۳-۷۴) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} RSS_R - RSS_{UR} &= \mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R - \mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \end{aligned} \qquad (۳-۷۵)$$

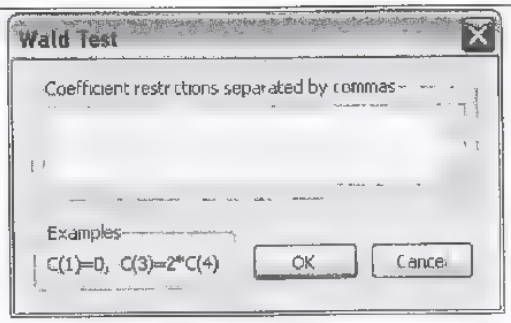
حال برای آزمون فرضیه $H_0: \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ نسبت $F$ را مشابه (۳-۶۸) تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} F_{m,n-K} &= \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/m}{RSS_{UR}/(n-K)} \\ &= \frac{n-K}{m}\frac{(\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R - \mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR})}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}} \\ &= \frac{n-K}{m}\frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}} \\ &= \frac{n-K}{m}\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}} \end{aligned} \qquad (۳-۷۶)$$

بنابراین، برای محاسبهٔ $F$ فقط لازم است که رگرسیون غیرمقید را برآورد کرده و $F$ را حساب می‌کنیم. اگر واقعاً محدودیتها بی‌تأثیر باشند آنگاه به‌ازای تخمین‌های غیرمقید نیز برقرار خواهند بود و لذا $\mathbf{r} - \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ به صفر نزدیک می‌شود که به‌دنبال آن مقدار $F$ نیز کوچک شده و در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد و فرضیه $H_0$ رد نمی‌شود. این بدان معنا است که محدودیت‌های $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ برقرار هستند.

**آزمون محدودیت‌ها با Eviews: آزمون والد** فایل 3eq4

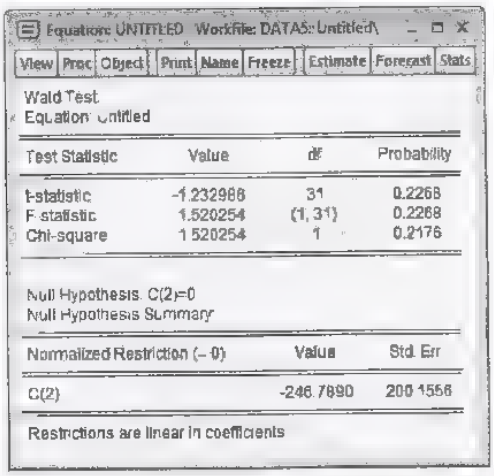
در پنجره Equation (نتایج تخمین)، برای آزمون محدودیت‌ها، از منوی View گزینه Coefficient diagnostics و سپس گزینه Wald Test-Coefficient Restrictions را انتخاب می‌کنیم. در این صورت پنجره‌ای به نام Wald Test باز می‌شود.




در این پنجره، محدودیتهای مورد نظر را وارد می‌کنیم. به‌عنوان مثال اگر محدودیتهای $\beta_2 = 0$ ، $\beta_4 + \beta_5 = 1$ و $\beta_3 = -\beta_6$ را داشته باشیم، آنها را به‌صورت زیر وارد می‌کنیم:

$$C(2)=0, C(4)+C(5)=1, C(3)=-C(6)$$

اگر در رگرسیون سرمایه‌گذاری، ضریب نرخ بهره را برابر صفر قرار دهیم، سپس در پنجره wald test عبارت C(2)=0 را نوشته و OK را انتخاب می کنیم. نتایج آزمون در پنجره زیر نشان داده می‌شود:




در پنجره فوق، t-statistic بیانگر مقدار آماره $t$ برای ضریب نرخ بهره در معادله اصلی (سرمایه‌گذاری) است (یعنی C(2)) که وضعیت معنادار بودن یا بودن آن نشان می‌دهد. چون مقدار F و $\chi^2$ کوچک هستند (زیرا احتمال مربوطه بزرگتر از ۰/۰۵ است)، لذا محدودیت مورد نظر معنادار نیست و C(2) برابر با صفر است.

حال اگر هم زمان محدودیت C(2)=0 و C(1)=0 را اعمال نماییم (یعنی عرض از مبدأ و ضریب نرخ بهره را برابر صفر قراردهیم) نتایج آزمون والد به‌صورت زیر می‌باشد:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats

Wald Test
Equation: Untitled

| Test Statistic | Value | df | Probability |
|---|---|---|---|
| F-statistic | 3.127557 | (2, 31) | 0.0579 |
| Chi-square | 6.255115 | 2 | 0.0438 |

Null Hypothesis: C(1)=0, C(2)=0
Null Hypothesis Summary:

| Normalized Restriction (= 0) | Value | Std. Err. |
|---|---|---|
| C(1) | 5742.205 | 5095.942 |
| C(2) | -246.7890 | 200.1556 |

Restrictions are linear in coefficients

در اینجا مقدار F و $\chi^2$ بزرگ هستند (زیرا سطح احتمال مربوطه نزدیک به ۰/۰۵ و یا کوچکتر هستند) و لذا محدودیت‌های مورد نظر، معنادار هستند. مقدار آماره والد برابر با $\chi^2=۶/۲۵$ است. جزئیات آماره والد در فصل هفتم بحث شده است.

## ۳-۱۳ پیش‌بینی با رگرسیون چندمتغیره

در فصل دوم مبحث پیش‌بینی را براساس رگرسیون دو متغیره بررسی کردیم. در اینجا نیز بحث مشابهی را برای رگرسیون $K$ متغیره می‌توان مطرح کرد. بدین منظور معادله چندمتغیره را در نظر بگیرید آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t \\ &= [1 \quad X_{2t} \quad \cdots \quad X_{Kt}] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + u_t = \mathbf{x}_t'\boldsymbol{\beta} + u_t \end{aligned} \tag{۳-۷۷}$$

$$\mathbf{x}_t' = [1 \quad X_{2t} \quad \cdots \quad X_{Kt}]$$

مقدار پیش‌بینی $Y$ برای سال $f$ برابر است با:

$$Y_f = \mathbf{x}_f'\boldsymbol{\beta} + u_f \tag{۳-۷۸}$$

مقدار تخمینی این پیش‌بینی برابر است با:

$$\hat{Y}_f = \mathbf{x}_f'\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{۳-۷۹}$$

خطای پیش‌بینی برابر با تفاوت مقدار واقعی و پیش‌بینی $Y$ در سال $f$ می‌باشد:

$$\begin{aligned} e_f &= Y_f - \hat{Y}_f = \mathbf{x}_f'\boldsymbol{\beta} + u_f - \mathbf{x}_f'\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= -\mathbf{x}_f'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) + u_f \end{aligned} \tag{۳-۸۰}$$

$e_f$ یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی آن برابر صفر است و واریانس آن برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(e_f) &= E(e_f^2) = E[-\mathbf{x}'_f(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})+u_f][-\mathbf{x}'_f(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})+u_f]' \\ &= E[\mathbf{x}'_f(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{x}_f]+E(u_f^2) \\ &= \mathbf{x}'_f\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f+\sigma^2 = \sigma^2[1+\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f]\end{aligned} \tag{۳-۸۱}$$

توجه شود که $E[\mathbf{x}'_f(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})u_f]=\mathbf{x}'_f E(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})E(u_f)=0$ است زیرا $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ تابعی از $u_t$ است که $t<f$ می‌باشد و به دلیل عدم خودهمبستگی بین $u_t$ و $u_f$، می‌توان نتیجه گرفت $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ و $u_f$ مستقل هستند.

با توجه به واریانس خطای پیش‌بینی می‌توان انحراف معیار خطای پیش‌بینی را حساب کرد که برابر با $SE(e_f)=\sqrt{\mathrm{var}(e_f)}$ می‌باشد. مرز پیش‌بینی برابر با «به‌اضافه و منهای دو برابر انحراف معیار پیش‌بینی» می‌باشد. پیش‌بینی با مدل‌های چندمتغیره با استفاده از Eviews دقیقاً مشابه پیش‌بینی با رگرسیون یک متغیره است.

فاصله اطمینان پیش‌بینی برای مقدار پیش‌بینی $(Y_f)$ عبارت است از:

$$t_{n-K}=\frac{e_f}{\sqrt{\mathrm{var}(e_f)}} \Rightarrow t_{n-K}=\frac{Y_f-\hat{Y}_f}{\hat{\sigma}\sqrt{1+\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f}}$$

$$\Rightarrow\left(\hat{Y}_f-t_{0/05,n-K}\hat{\sigma}\sqrt{1+\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f}\le Y_f\le\hat{Y}_f+t_{0/05,n-K}\hat{\sigma}\sqrt{1+\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f}\right) \tag{۳-۸۲}$$

تعیین فاصله اطمینان پیش‌بینی برای امید ریاضی شرطی، یعنی $E(Y_t\mid X_t)=\mathbf{x}'_t\beta$، نیز مشابه بحث فوق می‌باشد. با توجه به اینکه برآورد امید ریاضی شرطی برابر با $\hat{Y}_t=\mathbf{x}'_t\hat{\beta}$ است لذا خطای پیش‌بینی برابر است با:

$$e_f^*=E(Y_f\mid X_f)-\hat{Y}_f=\mathbf{x}'_f\boldsymbol{\beta}-\mathbf{x}'_f\hat{\boldsymbol{\beta}}=-\mathbf{x}'_f(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \tag{۳-۸۳}$$

امید ریاضی و واریانس $e_f^*$ برابر است با:

$$\begin{aligned}&E(e_f^*)=0 \\ &\mathrm{var}(e_f^*)=E(e_f^*e_f^{*\prime})=E\left[\left(\mathbf{x}'_f(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\right)\left(\mathbf{x}'_f(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\right)'\right] \\ &\quad=\mathbf{x}'_f E\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\right]\mathbf{x}_f=\sigma^2\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f\end{aligned} \tag{۳-۸۴}$$

پیش‌بینی فاصله‌ای برای معادله رگرسیون یا امید ریاضی شرطی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$t_{n-K}=\frac{e_f^*}{\sqrt{\mathrm{var}(e_f^*)}}=\frac{E(Y_f\mid X_f)-\hat{Y}_f}{\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f}}$$

$$\Rightarrow\left(\hat{Y}_f-t_{./۰۵,n-K}\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f}\le E(Y_f\mid X_f)\le\hat{Y}_f+t_{./۰۵,n-K}\hat{\sigma}\sqrt{\mathbf{x}'_f(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_f}\right)\quad(۳-۸۵)$$

**مسائل**

۱- برای برآورد رگرسیون $Y_t=\beta_۰+\beta_۱X_{۱t}+\beta_۲X_{۲t}+\beta_۳X_{۳t}+u_t$ مقادیر زیر برحسب انحراف از میانگین از نمونه‌ای به حجم $n=۲۴$ حساب شده‌اند:

$$\sum y_i^۲=۶۰\ ,\ \sum x_{i۱}^۲=۱۰\ ,\ \sum x_{i۲}^۲=۳۰\ ,\ \sum x_{i۳}^۲=۲۰$$
$$\sum x_{i۱}y_i=۷\ ,\ \sum x_{i۲}y_i=-۷\ ,\ \sum x_{i۳}y_i=-۲۶$$
$$\sum x_{i۱}x_{i۲}=۱۰\ ,\ \sum x_{i۱}x_{i۳}=۵\ ,\ \sum x_{i۲}x_{i۳}=۱۵$$

الف) فرضیه $\beta_۱+\beta_۲+\beta_۳=۱$ را آزمون کنید.

ب) فرضیه $[\beta_۱\ \ \beta_۲\ \ \beta_۳]=[۱\ \ ۱\ \ ۲]$ را آزمون کنید.

ج) فرضیه‌های الف و ب چه تفاوتی دارند.

۲- مقادیر زیر از یک نمونهٔ ۲۰تایی به‌دست آمده است.

$$\sum Y_i=۲۰\ ,\ \sum X_{i۱}=۳۰\ ,\ \sum X_{i۲}=۴۰$$
$$\sum Y_i^۲=۸۰\ ,\ \sum X_{i۱}^۲=۹۰\ ,\ \sum X_{i۲}^۲=۱۵۰$$
$$\sum X_{i۱}Y_i=۶۰\ ,\ \sum X_{i۲}Y_i=۹۰\ ,\ \sum X_{i۱}X_{i۲}=۱۲۰$$

الف) مقادیر فوق را ابتدا بر حسب انحراف از میانگین به‌دست آورید.

ب) رگرسیون $Y$ روی $X_۱$ و $X_۲$ را برآورد کنید و آماره $t$ را برای هر یک از ضرایب حساب کنید.

ج) $R^۲$ و $F$ را حساب کنید.

د) فرضیه برابری ضریب $X_۱$ و $X_۲$ را آزمون کنید.

۳- تابع تولید از نمونه‌ای به حجم $n$، به‌صورت زیر برآورد شده است:

$$\ln Q_i=۱/۵+./۶۵۵\ln K_i+۰/۴۰۵\ln L_i\qquad R^۲=./۹۵$$
$$(۱/۲)\quad(۳/۲)\qquad(۲/۵)$$

کوواریانس ضریب سرمایه و نیروی کار برابر با ۰/۰۵ است.

الف) آیا کشش تولیدی سرمایه و کار یکسان هستند؟

ب) آیا بازدهی ثابت نسبت به مقیاس وجود دارد؟

۳- ثابت کنید که $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ است.

۴- ثابت کنید که $R^2$ مجذور ضریب همبستگی ساده بین $\mathbf{y}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ است (که $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ می‌باشد).

۵- فرق $R^2$ با $\bar{R}^2$ تعدیل شده چیست؟

۶- مدل رگرسیون زیر به‌صورت انحراف از میانگین می‌باشد:

$$y_t = \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + u_t$$

مقادیر زیر حساب شده‌اند:

$$\sum y_t^2 = 500 \qquad \sum x_{2t}^2 = 30 \qquad \sum x_{3t}^2 = 30 \qquad n = 20$$
$$\sum x_{2t} y_t = 30 \qquad \sum x_{3t} y_t = 20 \qquad \sum\sum x_{2t} x_{3t} = 0$$

الف) ضرایب $\beta_2$، $\beta_3$ و $R^2$ را برآورد کنید.

ب) فرضیه $\beta_2 = 7$ را آزمون کنید.

ج) فرضیه $\beta_2 = \beta_3 = 0$ را آزمون کنید.

د) فرضیه $\beta_2 = 3\beta_3$ را آزمون کنید.

۷- ثابت کنید که مجموع مجذورات پسماندهای (باقیمانده‌های) مقید بزرگتر از مجموع مجذورات غیرمقید است؟

۸- تابع تولید زیر را در نظر بگیرید:

$$Q_t = AL_{1t}^{\beta_1} L_{2t}^{\beta_2} K_t^{\beta_3} e^{u_t}$$

$L_1$ تعداد کارگران ماهر، $L_2$ تعداد کارگران غیرماهر، $K$ سرمایه و $u_t$ جمله اختلال است. در صورتی که همواره رابطه $L_1 + L_2 = 1000$ برقرار باشد آیا می‌توان تابع تولید را برآورد کرد؟

۹- در مسئله ۱ فصل اول، رگرسیون $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 Z_i + u_i$ برآورد کنید.

۱۰- در مسئله ۳ اثر خالص و ناخالص $X$ بر $Y$ را حساب کنید.

۱۱- در مسئله ۱ فصل اول، ضرایب همبستگی جزئی را محاسبه و تحلیل کرده و با ضرایب همبستگی ساده مقایسه کنید.

۱۲- معادله زیر برآورد شده است:

$$\hat{Y}_i = ۲/۵ + ۰/۴۲X_{۲i} + ۱/۲X_{۳i} \qquad R^۲ = ۰/۷۵$$

آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون را انجام دهید.

۱۳- مقادیر زیر برای یک رگرسیون دو متغیره حساب شده‌اند:

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} ۳۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴۰ & ۲۰ \\ ۰ & ۲۰ & ۶۰ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} ۱۳۲ \\ ۲۴ \\ ۹۲ \end{bmatrix} \qquad \sum y_i^۲ = ۱۵۰$$

الف) حجم نمونه چقدر است؟

ب) ضرایب معادله رگرسیون را تخمین بزنید.

ج) $\hat{\sigma}^۲$ را حساب کنید.

د) $R^۲$ و $\overline{R}^۲$ را حساب کنید.

هـ) آماره $t$ را برای هر یک از ضرایب حساب کنید.

و) آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون را انجام دهید.

۱۴- در معادله $Y_i = \sum_{j=۱}^{K} \beta_j X_{ji} + u_i$ که شکل ماتریسی آن به‌صورت $\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}$ است، با نمونه‌ای به حجم $n$، تخمین $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ به‌صورت زیر است:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^n = (\mathbf{X'X})^{-۱}\mathbf{X'y}$$

حال اگر یک مشاهده به $n$ مشاهدهٔ قبلی اضافه کنیم، ثابت کنید که تخمین جدید $\boldsymbol{\beta}$ که با $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{n+۱}$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر است:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{n+۱} = \hat{\boldsymbol{\beta}}^n + \frac{(\mathbf{X'X})^{-۱}\mathbf{z}'_{n+۱}(Y_{n+۱} - \mathbf{z}_{n+۱}\hat{\boldsymbol{\beta}}^n)}{۱ + \mathbf{z}_{n+۱}(\mathbf{X'X})^{-۱}\mathbf{z}'_{n+۱}}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} ۱ & X_{۲۱} & \cdots & X_{K۱} \\ ۱ & X_{۲۲} & \cdots & X_{K۲} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۱ & X_{۲n} & \cdots & X_{Kn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_{n+۱} = [۱ \quad X_{۲(n+۱)} \ \dots \ X_{K(n+۱)}]$$

۱۵- در مسئله ۱۴ ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$RSS_{n+1} = RSS_n + \frac{(Y_{n+1} - \mathbf{z}_{n+1}\hat{\boldsymbol{\beta}}^n)}{1 + \mathbf{z}_{n+1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{z}'_{n+1}}$$

۱۶- در رگرسیون $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + \beta_5 X_{5t} + u_t$، مراحل آزمون فرضیه $\beta_4 = \beta_5 = 0$ را توضیح داده و آماره $F$ را تشکیل دهید.

۱۷- در معادله $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ کوواریانس $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$ را حساب کنید. آیا امکان دارد که کوواریانس آنها برابر صفر شود.

۱۸- ثابت کنید که در رگرسیون $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t$، تغییرات توضیح داده شده برابر است با:

$$ESS = \hat{\beta}_2 \sum x_{2t} y_t + \hat{\beta}_3 \sum x_{3t} y_t + \cdots + \hat{\beta}_K \sum x_{Kt} y_t$$

۱۹- معادله $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t$ را به‌صورت $y_t = \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K x_{Kt} + u_t$ بنویسید. حروف کوچک بیانگر انحراف از میانگین هستند.

۲۰- رگرسیون‌های زیر برآورد شده‌اند:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_1 + 0/95 X_{2t}$$
$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_2 + 0/85 X_{3t}$$
$$\hat{X}_{3t} = \hat{\alpha}_3 + 0/75 X_{2t}$$
$$\hat{X}_{2t} = \hat{\alpha}_4 + 0/65 X_{3t}$$

بر اساس اطلاعات فوق، ضرایب $\beta_2$ و $\beta_3$ را در معادله $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ برآورد کنید.

۲۱- رگرسیون $Y_t = \alpha + \beta Y_t^* + u_t$ را داریم که $Y_t$ مقدار واقعی و $Y_t^*$ مقدار پیش‌بینی می‌باشد. فرضیه انتظارات عقلایی ادعا می‌کند که شکل‌گیری انتظارات به‌طور متوسط درست است، زیرا خطای پیش‌بینی دارای میانگین صفر می‌باشد ( $E(Y_t) = E(Y_t^*)$ است). نتایج حاصل از برآورد مدل فوق عبارت است از:

$$Y_t = \underset{(0/2)}{0/25} + \underset{(6/6)}{0/95} Y_t^* \qquad RSS = 25/4 \ , \ n = 32$$

اگر $\bar{Y}^* = 10$ , $\sum (Y_t^* - \bar{Y}^*)^2 = 40/85$ باشد. آیا می‌توان نتایج فوق را مطابق با فرضیه انتظارات عقلایی دانست؟

۲۲- در رگرسیون $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t$ آیا درست است که آزمون فرضیه $H_0: \beta_2 = \cdots = \beta_K = 0$ را معادل به فرضیه $H_0 = R^2 = 0$ بدانیم؟ چرا؟

۲۳- اگر در گرسیون $Y_t^* = \beta_1 + \beta_2 X_{2t}^* + \beta_3 X_{3t}^* + u_t$ متغیرها استاندارد شده باشند، ثابت کنید که روابط زیر برقرار است ( $r_{ij}$ ضریب همبستگی بین متغیرها را نشان می‌دهد: ۱ برای $Y$، ۲ برای $X_2$ و ۳ برای $X_3$ )

الف) $\mathbf{X'X} = n\begin{bmatrix} 1 & r_{23} \\ r_{23} & 1 \end{bmatrix}$

ب) $\mathbf{X'y} = n\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix}$

ج) $\hat{\beta}_1 = 0$

د) $\hat{\beta}_2 = \frac{r_{12} - r_{23}r_{13}}{1 - r_{23}^2}$ , $\hat{\beta}_3 = \frac{r_{13} - r_{23}r_{12}}{1 - r_{23}^2}$

۲۴- ثابت کنید که اگر به جای معادله $Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + u_t$ متغیر $X_{3t}$ را اضافه کنیم، اولاً $R^2$ افزایش می‌یابد و ثانیاً در صورتی $\bar{R}^2$ افزایش می‌یابد که آماره $t$ برای ضریب $X_{3t}$ بزرگتر از ۱ باشد.

۲۵- رگرسیون $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t$ را داریم. باقیمانده‌های این مدل را با $e_t$ و مقادیر برآوردی را با $\hat{Y}_t$ نشان می‌دهیم.

الف) در رگرسیون $e_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \varepsilon_t$ ضریب تعیین $(R^2)$ چه چیزی را بیان می‌کند. ثابت کنید که $nR^2$ برابر با آماره ضریب لاگرانژ است.

ب) $R^2$ حاصل از رگرسیون $Y_t = \gamma_1 + \gamma_2 \hat{Y}_t + v_t$ چه چیزی را نشان می‌دهد و چه رابطه‌ای با $R^2$ در معادله $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t$ دارد.

ج) در رگرسیون $Y_t = a_1 + a_2 e_t + w_t$ ضرایب $a_1$ و $a_2$ را برآورد کنید. $R^2$ این معادله چه تفسیری دارد؟

۲۶- رگرسیون $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ را در نظر بگیرید. حال رگرسیون‌های زیر نیز برآورد شده‌اند:

$$X_{2t} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{3t} + v_{1t}$$
$$X_{3t} = \gamma_1 + \gamma_2 X_{2t} + v_{3t}$$

با استفاده از باقیمانده‌های معادلات فوق، معادله زیر را برآورد می‌کنیم:

$$\hat{v}_{2t} = b_1 + b_2 \hat{v}_{3t} + \varepsilon_t$$

الف) ثابت کنید که $\hat{b}_2 = \hat{\beta}_2$ است.

ب) اگر رگرسیون $Y_t = \gamma_1 + \gamma_2 \hat{v}_{2t} + \gamma_3 \hat{v}_{3t} + u_t$ را برآورد کنیم، رابطه بین $\hat{\gamma}_2$ و $\hat{\beta}_2$ را به دست آورید.

## ضمیمه فصل ۳: رگرسیون چند متغیره در Stata

### برآورد معادلات رگرسیون چند متغیره در Stata

فایل data3

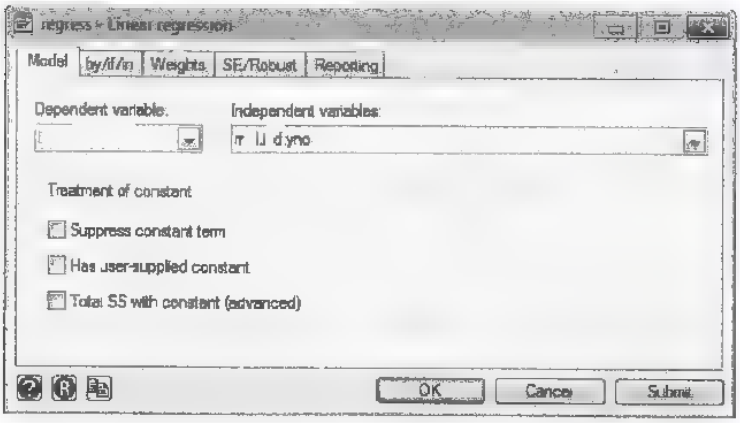
برآورد رگرسیون چندمتغیره، مشابه رگرسیون ساده است. بدین منظور معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$I_t = \alpha + \beta RR_t + \theta \Delta YNO_t + \gamma I_{t-1}$$

اینجا برای وارد کردن تفاضل yno از d.yno و برای وقفهٔ $I_{t-1}$ از l.i استفاده می‌شود. بنابراین با انتخاب مسیر زیر مشابه رگرسیون ساده عمل می‌کنیم:

Linear regression → Linear models and related → Statistics

متغیرها را به صورت زیر وارد می‌کنیم:




نتایج به‌صورت زیر به دست می‌آید که کاملاً مشابه رگرسیون ساده است:

```
. - preserve
regress i rr  l.i  d.yno

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      35
-------------+------------------------------           F(  3,    31) =  184.73
       Model |  4.1221e+10     3  1.3740e+10           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  2.3058e+09    31  74380117.7           R-squared     =  0.9470
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9419
       Total |  4.3527e+10    34  1.2802e+09           Root MSE      =  8624.4

------------------------------------------------------------------------------
           i |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rr |  -246.8273   200.1467    -1.23   0.227    -655.0293    161.3746
           i |
         L1. |   .8194636   .0523257    15.66   0.000     .7127447    .9261825
         yno |
         D1. |   1.18792    .1583372     7.50   0.000     .8649894    1.510851
       _cons |   5742.107    5095.64     1.13   0.268     -4650.52    16134.73
------------------------------------------------------------------------------
```

ضریب $RR_t$

ضریب $I_{t-1}$

ضریب $\Delta YNO_t$

عرض از مبدأ

## آزمون محدودیت‌ها (آزمون والد) در Stata

### الف) آزمون محدودیت‌های صفری:

می‌خواهیم به‌طور همزمان صفربودن چند ضریب را آزمون کنیم. مثلاً صفر بودن ضریب rr و $\Delta$YNo.

بدین منظور، بعد از برآورد معادله مورد نظر (در اینجا از معادله $I_t=\alpha+\beta RR_t+\theta\Delta YNO_t+\gamma I_{t-1}$ استفاده کرده‌ایم)، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

test (rr=0) (l.yno=0)

این فرضیه معادل با $\beta=\theta=0$ است که می‌توان از آزمون F برای مقایسه دو مدل مقید و غیرمقید استفاده نمود:

$I_t=\alpha+\beta RR_t+\theta\Delta YNO_t+\gamma I_{t-1}$ مدل غیر مقید

$I_t=\alpha+\gamma I_{t-1}$ مدل مقید

نتیجه آزمون عبارت است از:

```
. test (rr=0) (d.yno=0)

 ( 1)  rr = 0
 ( 2)  D.yno = 0

       F(  2,    31) =   31.83
            Prob > F =    0.0000
```

چون مقدار F=۳۱/۸۳ در ناحیه بحرانی قرار دارد (زیرا مقدار احتمال کوچکتر از ۰/۵۰ است)، لذا فرضیه $H_0$ (وجود محدودیت‌ها) رد می‌شود.

### ب) آزمون محدودیت‌های خطی:

به عنوان مثال، محدودیت $\theta-2\gamma=0$ و $0/01\beta+\theta=120$ را درنظر بگیرید.

ابتدا معادله مورد نظر را تخمین می‌زنیم و سپس فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
test (d.yno-2*l.i==0) (0.01*rr+d.yno==120)
```

نتیجه آزمون عبارت است از:

```
. test (d.yno-2*l.i==0) (0.01*rr+d.yno==120)

 ( 1)  D.yno - 2 L.i = 0
 ( 2)  .01 rr + D.yno = 120

       F(  2,    31) = 2082.10
            Prob > F =    0.0000
```

چون مقدار F=۲۰۸۲/۱ در ناحیه بحرانی قرار دارد لذا فرضیه $H_0$ مبنی بر برقرار بودن این محدودیت‌ها، رد می‌شود.

### ج) آزمون محدودیت‌های غیرخطی

این آزمون نیز مشابه آزمون محدودیت‌های خطی است با این تفاوت که بایستی آن را به شکل دیگری وارد نماییم. به‌عنوان مثال مدل $Y_t=\alpha+\beta X_t+\beta\gamma X_{t-1}+\gamma Y_{t-1}+u_t$ را در نظر بگیرید، این مدل ضریب $X_{t-1}$ برابر با حاصل‌ضرب ضرایب $X_t$ و $Y_{t-1}$ است. برای انجام این آزمون ابتدا معادله را به صورت زیر برآورد می کنیم:

```
reg y x l.x l.y
```

حال قید مورد نظر را با فرمان زیر آزمون می‌کنیم:

```
testnl _b[x]*_b[l.y]=_b[l.x]
```

بر اساس مقدار F در خصوص معنی‌دار بودن قیدها تصمیم‌گیری می کنیم.

### تخمین رگرسیون مقید

برای برآورد رگرسیون مقید، ابتدا هر یک از قیدها را تعریف کرده و سپس رگرسیون مقید را برآورد می‌کنیم. به‌عنوان مثال می‌خواهیم رگرسیون $I_t=\alpha+\beta RR_t+\theta\Delta YNO_t+\gamma I_{t-1}$ با توجه به قید $\theta-2\gamma=0$ برآورد کنیم. ابتدا قید را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم (قید شماره ۱):

```
constraint 1 d.yno-2*l.i=0
```

حال رگرسیون مقید را با فرمان cnsreg برآورد می‌کنیم:

```
cnsreg i rr d.yno l.i, c(1)
```

نتیجهٔ تخمین مقید عبارت است از:

فرمان رگرسیون مقید — قید شماره ۱

```
. cnsreg i rr d.yno l.i, c(1)

Constrained linear regression                      Number of obs =      35
                                                   F(  2,    32) =  248.68
                                                   Prob > F      =  0.0000
                                                   Root MSE      =  9067.8

 ( 1)  D.yno - 2 L.i = 0

------------------------------------------------------------------------------
           i |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rr |  -355.4319   203.2331    -1.75   0.090    -769.4042    58.54047
         yno |
         D1. |   1.481907   .0766643    19.33   0.000     1.325747    1.638067
           i |
         L1. |   .7409533   .0383321    19.33   0.000     .6628733    .8190333
       _cons |   8901.894   5116.793     1.74   0.092    -1520.672    19324.46
------------------------------------------------------------------------------
```

۱/۴۸۱۹=۲×۰/۷۴۰۹۵

اگر دو قید به صورت $\theta-2\gamma=0$ و $0/01\beta+\theta=25$ داشته باشیم، ابتدا هر یک از قیدها را جداگانه با شماره‌های ۱ و ۲ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

constraint 1 d.yno-2*l.i–0

constraint 2 0.01*rr+d.yno=25

حال رگرسیون مقید را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

cnsreg i rr d.yno l.i, c(1 2)

فرمان رگرسیون مقید — قید شماره ۱ — قید شماره ۲

```
. cnsreg i rr d.yno l.i, c(1 2)

Constrained linear regression                      Number of obs =      35
                                                   Root MSE      =   23257

 ( 1)  D.yno - 2 L.i = 0
 ( 2)  .01 rr + D.yno = 25

------------------------------------------------------------------------------
           i |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rr |   2407.991   16.56588   145.36   0.000     2374.288    2441.695
         yno |
         D1. |   .920087    .1656588    5.55   0.000     .5830516    1.257122
           i |
         L1. |   .4600435   .0828294    5.55   0.000     .2915258    .6285611
       _cons |   55063.65   9822.637    5.61   0.000     35079.34    75047.96
------------------------------------------------------------------------------
```

۰/۰۱×۲۴۰۷/۹۹=۰/۹۲۰۰۸۷

۰/۹۲۰۰۸۷=۲×۰/۴۶۰۰۴۳۵

فصل چهارم

# نقض فروض کلاسیک

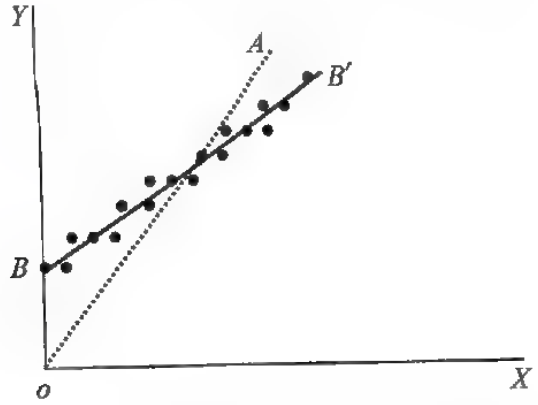
## ۴-۱ مقدمه

در فصل دوم فروض کلاسیک را مطرح کردیم که مبنای اصلی برآورد معادلات رگرسیون است. همان‌طور که دیدیم تمام نتایج و تحلیل‌های مربوط به تخمین معادلات، عمدتاً بر مبنای این فروض قرار دارد. در این راستا با چند مسئله مواجه‌ایم. اولاً چگونه می‌توان نقض فروض کلاسیک را تشخیص داد. ثانیاً در عمل چه چیزی باعث نقض فروض کلاسیک می‌شود. ثالثاً وقتی بدون توجه به نقض فروض کلاسیک، به تخمین معادلات و تفسیر نتایج می‌پردازیم با چه مسائل و مشکلاتی مواجه می‌شویم.

## ۴-۲ فرض اول: صفر بودن میانگین خطا

اولین فرض کلاسیک این است که امید ریاضی $u_t$ برابر با صفر است. از آنجا که $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ است، لذا وقتی میانگین خطا صفر باشد بدان معنا است که مقدار تخمینی به‌طور متوسط برابر با مقدار واقعی است و در نتیجه، خطای متوسط یا امید ریاضی خطا برابر صفر خواهد بود. می‌توان ثابت کرد که اگر $E(u_t)$ برابر با مقدار ثابتی باشد، آنگاه شیب معادله رگرسیون بدون تورش، ولی برآورد عرض از مبدأ باتورش خواهد بود. اگر $E(u_t)$ ثابت نباشد، آنگاه برآورد شیب معادله رگرسیون نیز دچار تورش خواهد شد.

از طرف دیگر اگر معادله رگرسیون دارای عرض از مبدأ باشد، فرض $E(u_t)=0$ نقض نمی‌شود. اما اگر رگرسیون فاقد عرض از مبدأ باشد، مقدار متوسط خطاها الزاماً صفر نخواهد شد و دارای آثار نامطلوبی خواهد بود؛ اولاً $R^2$ که برابر با نسبت $ESS/TSS$ است ممکن است منفی شود. این موضوع بدین معنی است که متوسط نمونه ($\bar{Y}$) می‌تواند تغییرات $Y$ را بهتر از متغیرهای توضیحی، توضیح دهد. به عبارت دیگر $\bar{Y}$ به‌عنوان برآوردی از $Y$، بهتر از معادله رگرسیون می‌باشد.[1] ثانیاً، وقتی معادله رگرسیون فاقد عرض از مبدأ باشد می‌تواند به‌طور بالقوه منجر به تورش شدید در تخمین شیبِ معادله شود. بدین منظور نمودار(۱-۴) را در نظر بگیرید.




نمودار ۱-۴: حذف عرض از مبدأ و تاثیر آن بر شیب

خط $OA$ بدون عرض از مبدأ و خط $BB'$ با عرض از مبدأ می‌باشد. تصور کنید که خط رگرسیون صحیح توسط خط $BB'$ توصیف شود. در این صورت اگر جمله ثابت حذف شود، تخمین شیب که با $OA$ نشان داده شده است، دارای تورش خواهد بود.

در رگرسیون فاقد عرض از مبدأ، خطا برابر با $e_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\beta}X_t$ است. از حداقل شدن مجموع مجذور خطاها خواهیم داشت:

$$\sum e_t^2 = \sum (Y_t - \hat{\beta}X_t)^2 \qquad (۴-۱)$$

[1] توجه شود که در رگرسیون $Y_t = \alpha + u_t$ برآورد $\alpha$ برابر با $\bar{Y}$ است. در این معادله، $R^2 = 0$ است. حال اگر در رگرسیون $Y_t = \beta X_t + u_t$ مقدار $R^2$ منفی باشد، بدان معنا است که $\hat{Y}_t = \hat{\alpha} = \bar{Y}$ بهتر از $\hat{Y}_t = \hat{\beta}X_t$ می‌باشد.

$$\frac{\partial e_t^2}{\partial \hat{\beta}} = -2\sum(Y_t - \hat{\beta}X_t)X_t = 0 \Rightarrow \sum(Y_t - \hat{\beta}X_t)X_t = 0 \Rightarrow \sum e_t X_t = 0 \qquad (۴-۲)$$

با حل (۴-۲) تخمین $\beta$ به دست می‌آید:

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2} \qquad (۴-۳)$$

لذا در اینجا از شرط $\sum e_t X_t = 0$ استفاده شده است، اما شرط $\sum e_t = 0$ که برای تخمین $\alpha$ به‌کار می‌رفت، مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. لذا ممکن است شرط $\sum e_t = 0$ برقرار نباشد و بدان معنا است که میانگین خطاها، صفر نخواهد شد. اگر شرط $\sum e_t = 0$ را به‌کار ببریم، آنگاه تخمین $\beta$ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\sum e_t = 0 \;\Rightarrow\; \sum Y_t - \hat{\beta}^{**}\sum X_t = 0 \;\Rightarrow\; \bar{Y} = \hat{\beta}^{**}\bar{X} \;\Rightarrow\; \hat{\beta}^{**} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \qquad (۴-۴)$$

بنابراین، تخمین دیگری برای شیب معادله رگرسیون به دست می آید که با $\hat{\beta}^*$ متفاوت است. بدین معنا که $\hat{\beta}^*$ مجموع مجذور خطاها یعنی $\sum e_t^2 = \sum(Y_t - \hat{\beta}X_t^2)$ را حداقل می‌کند که معادل با شرط $\sum e_t X_t = 0$ است، در حالی که $\hat{\beta}^{**}$ مجموع خطاها را صفر می‌کند که معادل با شرط $\sum e_t = 0$ است.

می‌توان نشان داد که وقتی عرض از مبدأ را از مدل صحیح یعنی $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ حذف می‌کنیم و به‌جای آن از مدل $Y_t = \beta X_t + v_t$ استفاده می‌کنیم، باعث می شود که تخمین شیب (یعنی $\hat{\beta}^*$) دچار تورش شود:

$$\hat{\beta}^* = \frac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2} = \frac{\sum X_t(\alpha + \beta X_t + u_t)}{\sum X_t^2} = \alpha\frac{\sum X_t}{\sum X_t^2} + \beta + \frac{\sum X_t u_t}{\sum X_t^2}$$

$$E(\hat{\beta}^*) = \alpha\frac{\sum X_t}{\sum X_t^2} + \beta + \frac{\sum X_t E(u_t)}{\sum X_t^2} = \beta + \alpha\frac{\sum X_t}{\sum X_t^2} = \beta + \alpha\frac{n\bar{X}}{\sum X_t^2} \qquad (۴-۵)$$

توجه شود که در مدل صحیح، $E(u_t) = 0$ است در حالی که در مدلی که عرض از مبدأ آن را حذف کرده‌ایم، امید ریاضی جملهٔ خطا صفر نمی‌باشد ($E(v_t) \neq 0$).

بنابراین، $\hat{\beta}^*$ دارای تورش است که علامت تورش عمدتاً بستگی به علامت $\alpha$ و همچنین بستگی به علامت $\bar{X}$ دارد. تورش $\hat{\beta}^*$ وقتی صفر می‌شود که $\alpha$ یا $\bar{X}$ صفر باشد. یعنی یا واقعاً عرض از

مبدأ صفر باشد و یا متغیر $X$ دارای مقادیر مثبت و منفی باشد به‌گونه‌ای که میانگین آن صفر گردد.

از طرف دیگر وقتی شرط $\sum e_t = 0$ برقرار باشد، آنگاه $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$ است، زیرا $Y_t = \hat{Y}_t + e_t$ است و لذا خواهیم داشت:

$$\sum Y_t = \sum \hat{Y}_t + \sum e_t \Rightarrow \bar{Y} = \bar{\hat{Y}} + \bar{e} \Rightarrow \bar{Y} = \bar{\hat{Y}} \quad , \quad \bar{e} = 0 \qquad (۴-۶)$$

برابری $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$ بدان معنا است که معادله رگرسیون، لااقل مقادیر متوسط $Y$ را دقیقاً به ما خواهد داد در حالی که معادلهٔ بدون عرض از مبدأ، چنین تضمینی را نمی‌دهد. زیرا $\bar{e} \neq 0$ بوده و لذا $\bar{Y} \neq \bar{\hat{Y}}$ می‌باشد.

نکته دیگر این است که وقتی $\alpha$ را حذف کنیم، ممکن است $R^2$ منفی شود. طبق تعریف، $R^2$ برابر است با:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

بدین منظور، $RSS$ را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

۱- اگر معادله شامل عرض از مبدأ باشد، همان‌طور که دیدیم $TSS = \sum y_t^2$ و $ESS = \sum \hat{y}_t^2 = \hat{\beta}^2 \sum x_t^2$ است. لذا $ESS \geq 0$ است و در نتیجه $RSS \leq TSS$ بوده که موجب می‌شود تا $R^2 \geq 0$ باشد. از طرف دیگر چون $\sum e_t = 0$ است لذا $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$ خواهد بود.

۲- اگر معادله فاقد عرض از مبدأ باشد، در این صورت $Y_t = \beta X_t + u_t$ و $\hat{Y}_t = \hat{\beta} X_t$ است که در این حالت، شرط $\sum e_i = 0$ برقرار نیست. لذا میانگین $Y_i$ و $\hat{Y}_i$ برابر نیستند.

$$\sum e_i \neq 0 \Rightarrow \sum (Y_i - \hat{Y}_i) \neq 0 \Rightarrow \sum Y_i - \sum \hat{Y}_i \neq 0 \Rightarrow \bar{Y} \neq \bar{\hat{Y}}$$

از طرف دیگر $TSS$ برابر است با:

$$\begin{aligned} TSS &= \sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i + e_i - \bar{Y})^2 = \sum [(\hat{Y}_i - \bar{Y}) + e_i]^2 \\ &= \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i^2 + 2\sum e_i (\hat{Y}_i - \bar{Y}) \end{aligned}$$

جملهٔ آخر برابر است با:

$$2\sum e_i (\hat{Y}_i - \bar{Y}) = 2\sum e_i \hat{Y}_i - 2\bar{Y} \sum e_i = 2\bar{Y}\bar{e}$$

زیرا $\sum e_i\hat{Y}_i = ۰$ است. از طرف دیگر در رگرسیون فاقد عرض از مبدأ، $\bar{e} \neq ۰$ است که با توجه به $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}} + \bar{e}$، خواهیم داشت:

$$۲\bar{Y}\bar{e} = ۲\bar{Y}(\bar{Y} - \bar{\hat{Y}})$$

بنابراین، $TSS$ برابر است با:

$$TSS = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^۲ + \sum e_i^۲ + ۲\bar{Y}(\bar{Y} - \bar{\hat{Y}})$$

دیدیم که $\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^۲$ معادل با $ESS$ است که در اینجا برابر است با:

$$ESS = TSS - RSS - ۲\bar{Y}(\bar{Y} - \bar{\hat{Y}})$$

در رگرسیون با عرض از مبدأ، $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$ است و لذا $ESS=TSS-RSS$ می‌باشد، ولی در رگرسیون فاقد عرض از مبدأ، $\bar{Y} \neq \bar{\hat{Y}}$ است و اگر $\bar{Y} > \bar{\hat{Y}}$ باشد، آنگاه ممکن است $ESS = (TSS - RSS) - ۲\bar{Y}(\bar{Y} - \bar{\hat{Y}})$ منفی شود. در این صورت، $ESS$ منفی شده و موجب منفی‌شدن $R^۲$ خواهد شد.

### ۴-۳ فرض دوم: واریانس همسانی

اگر جمله خطا دارای واریانس ثابت نباشد، آن را «واریانس ناهمسانی»[1] می‌گویند که در مقابل «واریانس همسانی»[2] قرار دارد. در اینجا به بررسی ماهیت واریانس ناهمسانی، پیامدها، آزمون‌های تشخیصی و برطرف کردن آن می‌پردازیم.

#### ۴-۳-۱ ماهیت واریانس ناهمسانی

واریانس ناهمسانی یکی از مشکلاتی است که در برآورد معادلات رگرسیون با آن مواجه می‌شویم. واریانس ناهمسانی بدان معنا است که واریانس $u_i$ (و به‌دنبال آن واریانس $Y_i$) ثابت نیست و معمولاً همراه با یک یا چند متغیر، افزایش می‌یابد. به‌ویژه، این پدیده در داده‌های مقطعی بسیار به چشم می‌خورد. به‌عنوان مثال وقتی مصرف یک کالا را ($Y$) را روی درآمد ($X$) برازش

---

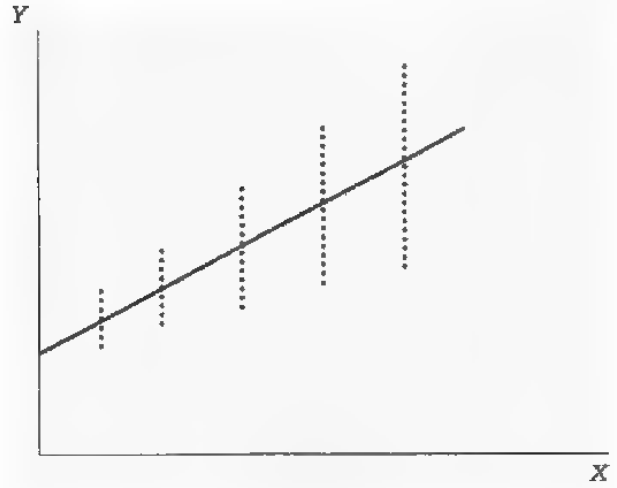
[1] heteroskedasticity
[2] hemoskedasticity

می‌کنیم و از داده‌های مقطعی (مانند گروه‌های درآمدی) استفاده می‌کنیم، در گروه‌های درآمدی پایین، مقدار مصرف کالای مورد نظر به‌هم نزدیک است ولی در گروه‌های درآمدی بالا، تفاوت‌های بیشتری وجود دارد. این موضوع باعث واریانس ناهمسانی می‌شود که طبق آن، $\sigma_t^2$ تابعی از درآمد ($X_t$) خواهد بود. در داده‌های سری زمانی نیز ممکن است نوسانات یک متغیر مانند بازده سهام، نرخ ارز و نرخ تورم در طول زمان افزایش یابد که شواهدی از واریانس ناهمسانی هستند.

در رگرسیون $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ واریانس $u_t$ و واریانس شرطی $Y_t$ برابر است با:

$$\sigma_t^2 = E(u_t^2 \mid X_t) = \mathrm{var}(Y_t \mid X_t) \qquad (۴-۸)$$

نمودار زیر بیانگر واریانس ناهمسانی است:




نمودار ۲-٤: واریانس ناهمسانی

نمودار ۲-۴ نشان می‌دهد که با افزایش $X$، پراکندگی $Y$ (واریانس $Y$) حول میانگین شرطی (خط رگرسیون) در حال افزایش است. بنابراین، واریانس شرطی $Y$ و $u$ تابعی از $X$ است.

$$\sigma_t^2 = E(u_t^2 \mid X_t) = \mathrm{var}(Y_t \mid X_t) = f(X_t) \qquad (۴-۹)$$

از طرف دیگر، می‌توان رابطه فوق را برای $u_t^2$ به‌صورت زیر نوشت:

$$u_t^2 = E(u_t^2 \mid X_t) + \varepsilon_t = \sigma_t^2 + \varepsilon_t = f(X_t) + \varepsilon_t \quad ; \quad \varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad (۴-۱۰)$$

از آنجا که مقادیر $u_t$ را نداریم از برآورد آنها، یعنی $e_t$، استفاده می‌کنیم:

$$e_t^2 = f(X_t) + \varepsilon_t \qquad (۴-۱۱)$$

معادله فوق یک معادله رگرسیون است که $e_t^2$ را روی $X_t$ برازش می‌کند. تابع $f$ نوع رابطه بین $e_t^2$ و $X_t$ را مشخص می‌کند که می‌تواند هر شکلی داشته باشد. معمولاً هر یک از روش‌های تشخیص واریانس ناهمسانی شکل خاصی از تابع $f$ را در نظر می‌گیرند. البته، نوع دیگری از واریانس ناهمسانی وجود دارد که طبق آن، واریانس $u_t$ تابعی از خطاهای گذشته ($u_{t-i}$ها) است. این نوع مدل‌ها معروف به مدل‌های ARCH[1] می‌باشند که در فصل چهاردهم بحث خواهند شد.

### ۴-۳-۲ پیامدهای واریانس ناهمسانی

۱- واریانس ناهمسانی، ویژگی بدون تورش بودن تخمین‌زننده‌های OLS را تغییر نمی‌دهد.

۲- واریانس ناهمسانی، ویژگی سازگاری تخمین‌زننده‌های OLS را تغییر نمی‌دهد.

۳- واریانس ناهمسانی، موجب می‌شود که تخمین‌زننده‌های OLS، کارا نباشند، یعنی حداقل واریانس را ندارند. به‌طور کلی برآورد واریانس جملهٔ خطا دچار تورش می‌شود.

۴- از آنجا که واریانس‌ها به‌درستی برآورد نمی‌شوند، لذا آزمون فرضیه‌هایی که با $t$، $F$ و $\chi^2$ انجام می‌شوند، قابل اطمینان نخواهند بود.

### ۴-۳-۳ برآورد واریانس مستحکم[2] وایت

یکی از پیامدهای واریانس ناهمسانی آن است که برآورد $\hat{\sigma}^2$ دارای تورش است و لذا تمامی آزمون‌های فرضیه را مخدوش می‌کند. برای حل این مشکل و برآورد بهتری از واریانس، روشی توسط وایت معرفی شده است که در اینجا آن را تشریح می‌کنیم.

در فصل دوم برای معادله رگرسیون سادهٔ $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$، تخمین $\beta$ از روش OLS را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \sum w_t Y_t = \beta + \sum w_t u_t \quad ; \quad w_t = \frac{x_t}{\sum x_t^2}$$

---

[1] Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
[2] robust

دیدیم که واریانس $\hat{\beta}$ در صورت واریانس همسانی، برابر است با:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = \sum w_t^2 E(u_t^2) = \frac{\sum x_t^2 E(u_t^2)}{(\sum x_t^2)^2} = \frac{(\sum x_t^2)\sigma^2}{(\sum x_t^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$$

حال در صورت واریانس ناهمسانی، واریانس $\hat{\beta}$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sum x_t^2 E(u_t^2)}{(\sum x_t^2)^2} = \frac{\sum x_t^2 \sigma_t^2}{(\sum x_t^2)^2} \qquad (۴-۱۲)$$

بنابراین در صورت واریانس همسانی، واریانس $\hat{\beta}$ برابر با $\sigma^2/\sum x_t^2$ است که $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2}$ می‌باشد. لذا واریانس $\hat{\beta}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_t^2} = \frac{\sum \frac{1}{n-2} e_t^2}{\sum x_t^2} \qquad (۴-۱۳)$$

معادله فوق نشان می‌دهد که در محاسبه واریانس $\hat{\beta}$ وزن $e_t^2$ها یکسان بوده و برابر با $\frac{1}{n-2}$ می‌باشد.

وایت (۱۹۸۰) پیشنهاد می‌کند که برای برآورد سازگار $\mathrm{var}(\hat{\beta})$ از (۴-۱۲) ، صورت زیر استفاده کنیم که مشابه (۴-۱۳) است ولی به‌جای $\frac{1}{n-2}$ از $\frac{x_t^2}{\sum x_t^2}$ استفاده می‌شود:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta})_{White} = \frac{\sum x_t^2 e_t^2}{(\sum x_t^2)^2} = \frac{\sum \frac{x_t^2 e_t^2}{\sum x_t^2}}{\sum x_t^2} = \frac{\sum k_t e_t^2}{\sum x_t^2} \quad ; \quad k_t = \frac{x_t^2}{\sum x_t^2} \qquad (۴-۱۴)$$

توجه شود که در اینجا تخمین $\sigma_t^2$ را نمی‌توانیم به‌دست آوریم، زیرا $e_t^2$ فقط یک مشاهده است. لذا فقط تخمین سازگار واریانس $\hat{\beta}$ را به‌دست آورده‌ایم، یعنی تخمین سازگار برای واریانس تخمین‌زننده‌های OLS. بنابراین روش وایت از باقیمانده‌های OLS استفاده می‌کند و واریانس $\hat{\beta}$ را اصلاح می‌کند به‌گونه‌ای که سازگار شود. لذا می‌توان آن را برای آزمون‌های فرضیه مورد استفاده قرار داد.

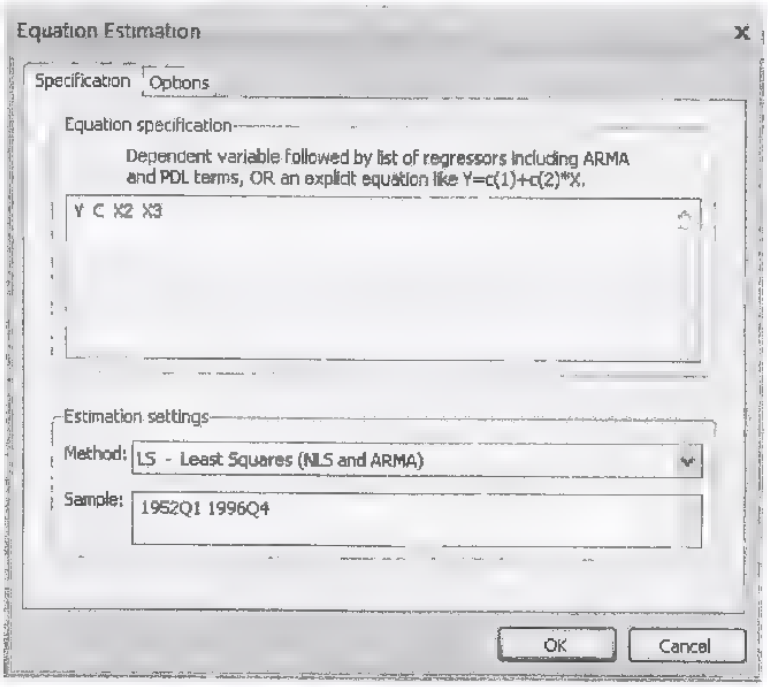
حال اگر رگرسیون $K$ متغیره باشد، واریانس $\hat{\beta}_k$ که ضریب $X_{kt}$ است به‌صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_k)_{White} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_{kt}^{2} e_t^{2}}{\left(\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_{kt}^{2}\right)^{2}} \qquad (۴-۱۵)$$

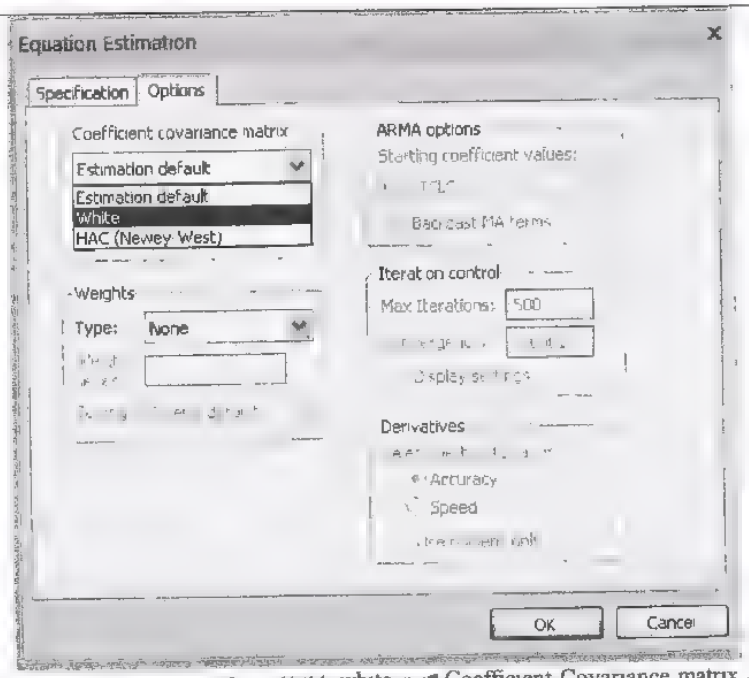
که $\varepsilon_{kt}$ جملات خطای معادله رگرسیون $X_{kt} = \alpha_0 + \alpha_1 e_t + \varepsilon_{kt}$ است.

**برآورد واریانس وایت در Eviews** فایل data5

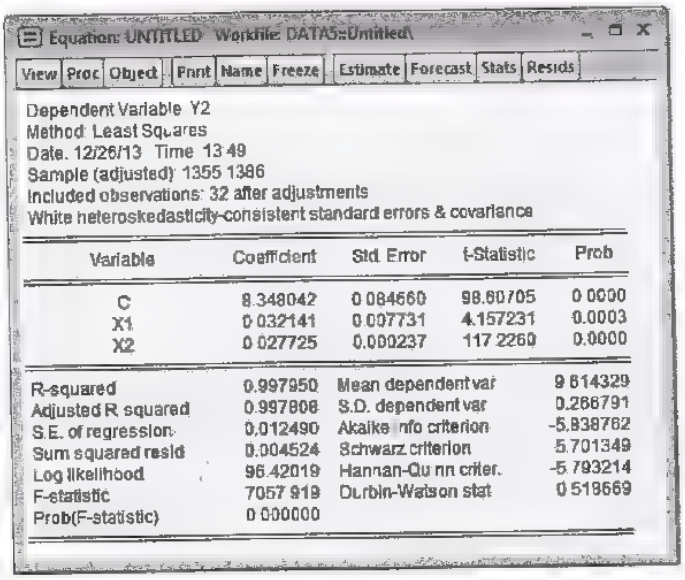
به منظور برآورد واریانس وایت، با استفاده از مسیر Quick → Estimate Equation پنجره زیر را باز می‌کنیم:




معادله موردنظر را در قسمت Equation Specification وارد می‌کنیم (به‌صورت Y C X2 X3). سپس با انتخاب گزینه options پنجرهٔ زیر را باز می‌کنیم:




در قسمت Coefficient Covariance matrix گزینه white را انتخاب می‌کنیم و معادله را تخمین می‌زنیم. این در حالی است که با انتخاب گزینه Estimation default واریانس‌های معمولی را حساب می‌کند. توجه شود که هرچند $\sigma^2$ هیچ تفاوتی نمی‌کند، ولی با انتخاب گزینه white، واریانس و انحراف معیار ضرایب متفاوت خواهد بود.



Equation: UNTITLED Workfile: DATA5::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y2
Method: Least Squares
Date: 12/26/13 Time: 13:49
Sample (adjusted): 1355 1386
Included observations: 32 after adjustments
White heteroskedasticity-consistent standard errors & covariance

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 8.348042 | 0.084660 | 98.60705 | 0.0000 |
| X1 | 0.032141 | 0.007731 | 4.157231 | 0.0003 |
| X2 | 0.027725 | 0.000237 | 117.2260 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.997950 | Mean dependent var | 9.614329 |
| Adjusted R-squared | 0.997808 | S.D. dependent var | 0.266791 |
| S.E. of regression | 0.012490 | Akaike info criterion | -5.838762 |
| Sum squared resid | 0.004524 | Schwarz criterion | -5.701349 |
| Log likelihood | 96.42019 | Hannan-Quinn criter. | -5.793214 |
| F-statistic | 7057.919 | Durbin-Watson stat | 0.519669 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

### ٤-۳-٤ آزمون‌های تشخیص واریانس ناهمسانی

آزمون‌های آماری مختلفی برای تشخیص واریانس ناهمسانی وجود دارد که در اینجا به برخی از این آزمون‌ها و نحوه انجام آنها با Eviews می‌پردازیم.

#### الف) آزمون بارتلت

آزمون بارتلت (۱۹۷۳) وقتی قابل کاربرد است که مشاهدات تکراری باشند. به‌عنوان مثال برای برآورد رابطه بین مصرف یک کالا با درآمد خانوار، مشاهدات تکراری وجود دارد. زیرا براساس آمار هزینه و درآمد خانوارها، مقادیر مصرف و درآمد هم بر حسب گروه‌های درآمدی و هم بر حسب سال موجود است. لذا اگر مصرف کالای $Y$ را تابعی از درآمد $(X)$ بدانیم، آنگاه در سال اول $n_1$ خانوار (یا گروه درآمدی) داریم که برای آنها می‌توان معادله $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ را برآورد نمود. حال اگر $t$ سال را در نظر بگیریم آنگاه معادله $Y_{it} = \alpha + \beta X_{it} + u_{it}$ را داریم که باقیمانده‌های آن $e_{it}$ می‌باشند. حال برای خانوار$i$ام (یا گروه درآمدی$i$ام) $T$ مشاهده داریم. بنابراین اگر معتقد باشیم که در این مدل، مشکل واریانس ناهمسانی وجود دارد و مسئلهٔ واریانس ناهمسانی بدین صورت است که با افزایش درآمد $(X)$ واریانس‌ها افزایش می‌یابند، می‌توان برای هر خانوار یا گروه درآمدی، واریانس را به‌طور جداگانه حساب نمود. بدین منظور $e_{it}$ها را برای هر خانوار یا گروه درآمدی به‌صورت زیر نوشته و واریانس مربوطه را حساب می‌کنیم:

$$\text{گروه درآمدی ۱}: e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1T} \Rightarrow \hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} e_{1t}^2}{T-1}$$

$$\text{گروه درآمدی ۲}: e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2T} \Rightarrow \hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} e_{2t}^2}{T-1} \qquad (۴-۱۶)$$

$$\vdots$$

$$\text{گروه درآمدی } n: e_{n1}, e_{n2}, \dots, e_{nT} \Rightarrow \hat{\sigma}_n^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} e_{nt}^2}{T-1}$$

اگر واریانس‌ها برابر باشند، آنگاه بایستی که $\hat{\sigma}_i^2$ها به‌هم نزدیک باشند، در غیر این صورت دارای تفاوت‌های اساسی بوده که بیانگر واریانس ناهمسانی است. بارتلت آماره‌ای را برای آزمون

فرضیه $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$ ارائه می‌کند که شکل کلی آن برای حالتی که $n$ گروه داشته و برای هر گروه $T_i$ مشاهد داشته باشیم به‌صورت زیر است:

$$B = \frac{1}{f}\left[(N-n)\log\hat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{n}(T_i-1)\log\hat{\sigma}_i^2\right] \qquad (۴-۱۷)$$

$$f = 1 + \frac{1}{3(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_i-1} - \frac{1}{N-1}\right] \;;\; N = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

$\hat{\sigma}^2$ میانگین واریانس‌ها است که برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i-1)\hat{\sigma}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(T_i-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i-1)\hat{\sigma}_i^2}{N-n} \qquad (۴-۱۸)$$

اگر $T_i$ها یکسان باشند، $\hat{\sigma}^2$ عبارت است از:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i-1)\hat{\sigma}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(T_i-1)} = \frac{(T-1)\sum_{i=1}^{n}\hat{\sigma}_i^2}{nT-n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\sigma}_i^2}{n-1} \qquad (۴-۱۹)$$

بدیهی است که اگر $T_i$ها یکسان باشند، آنگاه آماره $B$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود (توجه شود که در این حالت $N = \sum T_i = nT$ است):

$$B = \frac{T-1}{f}\left(n\log\hat{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{n}\log\hat{\sigma}_i^2\right) \qquad (۴-۲۰)$$

$$f = 1 + \frac{1}{3(n-1)}\left[\frac{n}{T-1} - \frac{1}{nT-1}\right] = 1 + \frac{n+1}{3(T-1)}$$

$B$ را می‌توان به‌صورت $\frac{T-1}{f}\log\frac{(\hat{\sigma}^2)^n}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2\ldots\hat{\sigma}_n^2}$ نوشت. بدیهی است که اگر همهٔ واریانس‌ها برابر باشند آنگاه مخرج کسر نیز برابر با $(\hat{\sigma}^2)^n$ می‌شود که در این صورت، آماره $B$ برابر صفر خواهد شد. در غیر این صورت، آماره $B$ بزرگ شده و در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد که بیانگر رد $H_0$ (رد واریانس همسانی) می‌شود. آماره $B$ توزیع $\chi^2$ با درجه آزادی $n-1$ دارد.

**ب) آزمون گلدفلد- کوانت**[1]

در این آزمون فرض بر این است که مشاهدات را می‌توان به دو گروه تقسیم نمود و سپس آزمون یکسان بودن واریانس بین این دو گروه را انجام داد. مراحل این آزمون را به‌صورت زیر است:

۱- فرض کنید در رگرسیون $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ رابطهٔ $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t^2$ برقرار است. این بدان معنا است که عامل واریانس ناهمسانی، متغیر $X_t$ است.

۲- مشاهدات را براساس مقادیر $X_t$ از کوچک به بزرگ مرتب کرده و سپس آنها را به سه گروه تقسیم می‌کنیم:

- گروه ابتدایی با حجم $n_1$ که آن را گروه۱ می‌نامیم.
- گروه میانی با حجم $m$.
- گروه آخر با حجم $n_2$ که آن را گروه۲ می‌نامیم.

بدیهی است که $n_1 + m + n_2 = n$ می‌باشد.

۳- معادله رگرسیون را برای گروه اول و دوم برآورد کرده و $RSS$ها را حساب می‌کنیم. مجموع مجذور خطاها را برای گروه اول و دوم به‌ترتیب با $RSS_1$ و $RSS_2$ نشان می‌دهیم.

۴- فرضیه $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ را آزمون می‌کنیم. این فرضیه بدان معنا است که واریانس گروه۱ و ۲ یکسان هستند. برای انجام این آزمون ابتدا $\hat{\sigma}_1^2$ و $\hat{\sigma}_2^2$ را حساب می‌کنیم که تحت فرضیه $H_0$، هر یک از آنها تخمین‌زنندهٔ $\sigma^2$ هستند. برای هر یک از این واریانس‌ها، روابط زیر برقرار است[2]:

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\sigma^2} = \frac{\chi^2_{n_1-K}}{n_1-K} \quad , \quad \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\sigma^2} = \frac{\chi^2_{n_2-K}}{n_2-K} \qquad (۴-۲۱)$$

حال آماره $F$ را برای مقایسه واریانس‌ها، تحت فرضیه $H_0$ تشکیل می‌دهیم:

$$F_{n_1-K,n_2-K} = \frac{\chi^2_{n_1-K}/n_1-K}{\chi^2_{n_2-K}/n_2-K} = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{RSS_1/n_1-K}{RSS_2/n_2-K} = \frac{n_2-K}{n_1-K}\frac{RSS_1}{RSS_2} \qquad (۴-۲۲)$$

---

[1] Goldfeld-Quandt Test

[2] فصل اول بخش ۲-۷-۱ و ۴-۷-۱ را ببینید.

اگر مقدار $F$ بزرگ باشد، در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد و فرضیه $H_0$ را رد می‌کند.

**ج) آزمون گلجسر**[1]

آزمون گلجسر قدر مطلق خطاها را روی متغیری که انتظار می‌رود واریانس ناهمسانی را توضیح می‌دهد (مانند $Z$) برازش می‌کند. شکل کلی چنین تابعی به‌صورت $|e_t| = \alpha_0 + \alpha_1 Z_t^{\gamma} + v_t$ است. از آنجا که این یک تابع غیرخطی است، لذا به ازای مقادیر مختلف $\gamma$ برآورد می‌شود. معمولاً مقایری که برای $\gamma$ در نظر گرفته می‌شود شامل ۱-، ۰/۵-، ۰/۵ و ۱ می‌باشد. به هر حال، معنادار بودن $\alpha_1$ بیانگر رد فرضیه واریانس همسانی است.

**د) آزمون همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن**[2]

اگر هدف ما بررسی رابطه بین واریانس $u_t$ و $X_t$ باشد می‌توان از ضریب همبستگی رتبه‌ای استفاده نمود. بدین منظور قدرمطلق $e_t$ها را حساب کرده و سپس آنها و همچنین $X_t$ها را رتبه‌بندی می‌کنیم. آنگاه تفاوت رتبه‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\text{تفاوت رتبه } |e_t| \text{ و } X_t = d_t = R_{|e_t|} - R_{X_t} \qquad (۴-۲۳)$$

$R_{|e_t|}$ و $R_{X_t}$ به ترتیب رتبه‌های $|e_t|$ و $X_t$ را نشان می‌دهند. ضریب همبستگی اسپیرمن را به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$r_s = ۱ - ۶\frac{\sum_{t=۱}^{n} d_t^{۲}}{n(n-۱)} \qquad (۴-۲۴)$$

حال فرضیه عدم همبستگی بین $X_t$ و $e_t$، یعنی فرضیه $H_0: r_s = 0$ را آزمون می‌کنیم. فرضیه $H_0$ بیانگر واریانس همسانی است. معنی‌دار بودن ضریب همبستگی را می‌توان با آماره $t$ آزمون نمود:

---

[1] Golejser test
[2] Spearman's rank correlation test

$$t_{n-2} = \frac{r_s}{\sqrt{\frac{1-r_s^2}{n-2}}} \qquad (۴-۲۵)$$

اگر فرضیه $H_0$ درست باشد، آنگاه $r_s = 0$ بوده و آماره $t$ صفر می‌شود. در غیر این صورت آماره $t$ بزرگ بوده و در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد که فرضیه $H_0$ را رد می‌کند. رد $H_0$ بیانگر آن است که واریانس ناهمسانی وجود دارد.

**هـ) آزمون بروش- پاگان-گادفری[2]**

آزمون بروش-پاگان برداری از متغیرها را که ممکن است موجب واریانس ناهمسانی شده باشند، در نظر می‌گیرد. شکل کلی این تابع به‌صورت زیر است:

$$\sigma_t^2 = E(u_t^2) = h(\alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \cdots + \alpha_r Z_{rt}) \qquad (۴-۲۶)$$

$Z_{it}$ها می‌توانند دقیقاً با متغیرهای توضیحی (یعنی $X_{it}$ها) یکسان باشند یا متفاوت باشند. واریانس ناهمسانی توسط فرضیه $H_0: \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ توصیف می‌شود. آزمون بروش-پاگان را می‌توان به‌صورت مراحل زیر انجام داد:

۱- ابتدا معادله $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t$ را با روش OLS برآورد کرده و باقیمانده‌ها ($e_t$) را حساب می‌کنیم.

۲- واریانس معادله رگرسیون را به‌صورت $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_t^2}{n}$ حساب می‌کنیم.

۳- رگرسیون $\frac{e_t^2}{\hat{\sigma}^2} = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{1t} + \alpha_2 Z_{2t} + \cdots + \alpha_r Z_{rt} + \varepsilon_t$ را با روش OLS برآورد کرده و مجموع تغییرات توضیح داده شده ($ESS_a$) را حساب می‌کنیم.

۴- تحت فرضیه $H_0$ رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{2} ESS_a \underset{asy}{\sim} \chi^2_{r-1} \qquad (۴-۲۷)$$

---

[1] فصل دوم بخش ۱۰-۲ را ببینید.

[2] Breusch–Pagan test

بنابراین، اگر $\frac{ESS_a}{2}$ بزرگتر از $\chi^2_{1-\alpha,r-1}$ باشد، فرضیه $H_0$ (واریانس همسانی) رد می‌شود. زیرا در این حالت، متغیرهای $Z_{it}$ توانسته‌اند $\sigma_i^2$ یا $e_i^2$ را توضیح دهند.

۵- از طرف دیگر می‌توان نشان داد که اگر $R_a^2$ (به‌دست آمده از بند۳) را در تعداد مشاهدات ضرب کنیم، آنگاه $nR_a^2$ توزیع $\chi^2_{r-1}$ دارد[1] که مشابه نتیجهٔ حاصل از بند ۴ است.

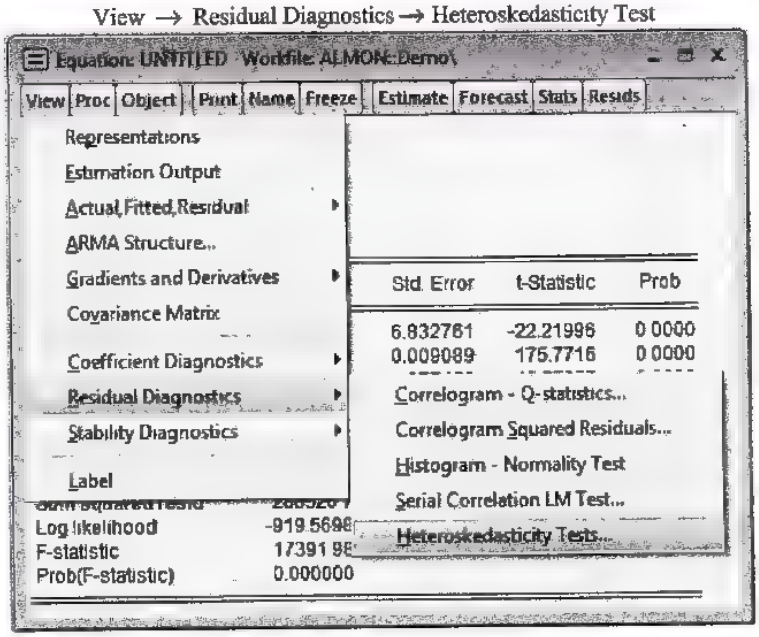
**و) آزمون هاروی[2]**

آزمون هاروی نیز مشابه آزمون‌های گلجسر و بروش-پاگان-گادفری است. در آزمون هاروی به‌جای $|e_i|$ و $e_i^2$ از لگاریتم مجذور خطاها ($\log e_i^2$) استفاده می‌شود. در این روش $\log e_i^2$ روی متغیرهای توضیحی و یا هر متغیری که موجب واریانس ناهمسانی شده است، برازش می‌شود.

**آزمون‌های واریانس ناهمسانی در Eviews**

برای انجام آزمون واریانس ناهمسانی، در پنجره نتایج مسیر زیا را انتخاب می‌کنیم:

View → Residual Diagnostics → Heteroskedasticity Test

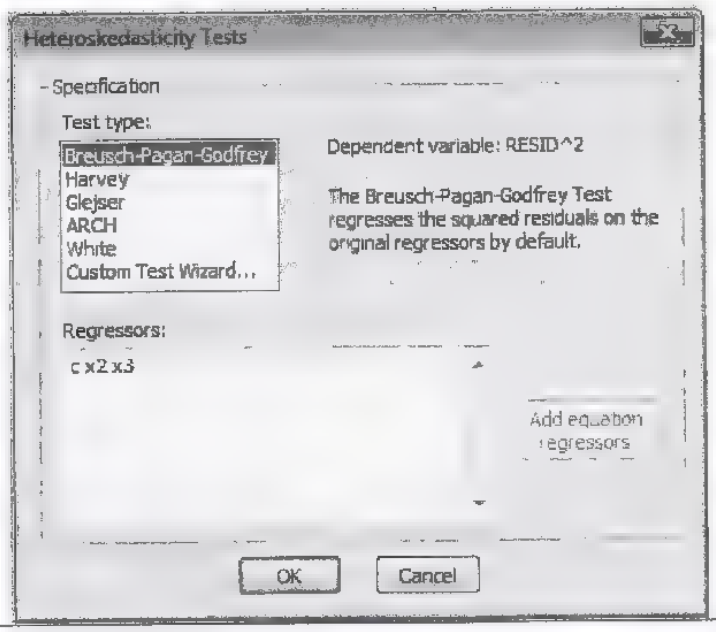



سپس در پنجره زیر نوع آزمون واریانس ناهمسانی را انتخاب می‌کنیم. آزمون‌های گادفری-بریش- پاگان، هاروی و گلجسر مشابه

[1] فصل هفتم بخش ۱۵-۷ را ببینید.

[2] Harvay

هم هستند و فقط متغیر وابسته آنها متفاوت است که به ترتیب به‌صورت $e_t^2$، $\log(e_t^2)$ و $|e_t^2|$ می‌باشند. در همه این آزمون‌ها در قسمت Regressors هر متغیری که تصور می‌رود موجب واریانس ناهمسانی می‌شود وارد می‌کنیم.
اگر گزینه Arch را انتخاب کنیم نوع خاصی از واریانس ناهمسانی را آزمون می‌کند که جزئیات آن در فصل سیزدهم بحث شده است. گزینه White نیز آزمون وایت را انجام می‌دهد که در بخش بعدی بررسی شده است.




**ز) آزمون وایت**[1]

آزمون وایت حالت عمومی‌تری از آزمون بروش-پاگان-گادفری است. در آزمون وایت، فرضیه واریانس همسانی به‌صورت $H_0: \sigma_t^2 = \sigma^2$ معرفی می‌شود. مراحل انجام این آزمون به‌صورت زیر است:

۱- معادله رگرسیون زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad (۴-۲۸)$$

برای آزمون «واریانس همسانی»، معادله (۲۸-۴) را برآورد کرده و باقیمانده‌ها $(e_t)$ را حساب می‌کنیم.

[1]White

۲- معادله رگرسیون زیر را برآورد می‌کنیم:

$$e_t^2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + \alpha_4 X_{2t}^2 + \alpha_5 X_{3t}^2 + \alpha_6 X_{2t} X_{3t} + v_t \qquad (۴-۲۹)$$

$v_t$ جملهٔ خطا است. در این رگرسیون از مجذور خطاها استفاده شده است، زیرا:

$$\mathrm{var}(e_t) = E(e_t - E(e_t))^2 = E(e_t^2) \quad ; \quad E(e_t) = 0 \qquad (۴-۳۰)$$

بنابراین، معادله (۲۹-۴) در واقع معادله میانگین شرطی برای $e_t^2$ است که بر اساس آن، رابطه زیر را می‌توان نوشت که همان معادله (۲۹-۴) می‌باشد:

$$e_t^2 = E(e_t^2) + v_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + \alpha_4 X_{2t}^2 + \alpha_5 X_{3t}^2 + \alpha_6 X_{2t} X_{3t} + v_t \qquad (۴-۳۱)$$

۳- با توجه به معادله رگرسیون $e_t^2$، می‌توان آزمون‌های مختلفی را انجام داد. به‌عنوان نمونه، می‌توان از آزمون $F$ که در فصل سوم بحث شد استفاده نمود. این روش مستلزم تخمین معادله (۲۹-۴) و همچنین تخمین معادلهٔ زیر است:

$$e_t^2 = \alpha_1 + v_t \qquad (۴\ ۳۲)$$

در واقع معادله (۲۹-۴) تخمین نامقید و معادله(۳۲-۴) بیانگر تخمین مقید است که در آن ضرایب $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ می‌باشد. حال $RSS$ را برای هر یک از این دو معادله حساب کرده و $F$ را برای آزمون آن، تشکیل می‌دهیم:

$$F = \frac{n-K}{m} \frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}} \qquad (۴-۳۳)$$

$RSS_R$ و $RSS_{UR}$ به‌ترتیب $RSS$ مقید (معادله ۳۲-۴) و نامقید (معادله ۲۹-۴) می‌باشند. $K$ تعداد ضرایب و $m$ تعداد محدودیت‌ها است که در اینجا $K=6$ و $m=5$ می‌باشد. اگر اختلاف این دو رگرسیون زیاد باشد در این صورت مقدار $F$ بزرگتر شده و بدین معنی است که فرضیه $H_0$ (یعنی ثابت بودن واریانس) رد می‌شود. بدیهی است که اگر $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ باشد، بدین معنی است که واریانس $u$ ثابت است.

روش دیگر برای آزمون واریانس همسانی معروف به آزمون ضریب لاگرانژ $(LM)$[1] است که نیازی به برآورد معادله (۳۲-۴) یعنی معادله رگرسیون مقید ندارد. در این روش از مقدار $R^2$ در

---

۱- Lagrange Multiplier. جزئیات این روش در فصل هفتم بخش ۱۵-۷ بحث شده است.

معادله (۲۹-۴) استفاده می‌شود. اگر یک یا چند ضریب در معادله (۲۹-۴) از نظر آماری معنی‌دار باشند، مقدار $R^2$ نسبتاً بزرگ خواهد بود. و در غیر این صورت مقدار $R^2$ کوچک خواهد بود. لذا آزمون $LM$ بر اساس حاصل‌ضرب $R^2$ در تعداد مشاهدات است که دارای توزیع $\chi^2_m$ می‌باشد:

$$nR^2 \sim \chi^2_m \qquad (۴-۳۴)$$

$m$ تعداد ضرایب تخمینی در معادله (۲۹-۴) (به‌استثنای جمله ثابت) است و از طرف دیگر برابر با تعداد محدودیت‌ها در آزمون $F$ می‌باشد.

در آزمون $LM$ فرضیه مورد نظر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$H_0: \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0 \qquad (۴-۳۵)$$

در آزمون $LM$ اگر مقدار $\chi^2 = nR^2$ بزرگتر از مقدار بحرانی باشد، سپس فرضیه $H_0$ رد می‌شود و بدین معنی است که واریانس جمله خطا، ثابت نمی‌باشد.

**آزمون وایت در Eviews** — فایل data2

برای انجام آزمون وایت، ابتدا معادله رگرسیون را برآورد می‌کنیم. در اینجا از رگرسیون نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) استفاده می‌کنیم که روی رشد نیروی کار (GL) و رشد سرمایه (GK) و سهم مخارج مصرفی دولت از تولید ناخالص داخلی (SG) برازش شده است.

Equation: UNTITLED Workfile: GOVERNMENT AND G...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/23/11 Time: 18:54
Sample (adjusted): 1346 1379
Included observations: 34 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 1.060829 | 0.182337 | 5.817965 | 0.0000 |
| GK | 0.386531 | 0.087822 | 4.401316 | 0.0001 |
| SG | 0.039558 | 0.055057 | 0.718497 | 0.4778 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.703292 | Mean dependent var | 5.645234 |
| Adjusted R-squared | 0.684149 | S.D. dependent var | 7.602924 |
| S.E. of regression | 4.272889 | Akaike info criterion | 5.826555 |
| Sum squared resid | 565.9849 | Schwarz criterion | 5.961233 |
| Log likelihood | -96.05143 | Hannan-Quinn criter. | 5.872484 |
| Durbin-Watson stat | 1.591813 | | |

در پنجره فوق، از منوی View مسیر زیر دنبال می‌کنیم:

View → Residual Tests → White Heteroskedasticity (no cross term)

توجه شود که no cross term بدین معنی است که حاصل‌ضرب متقاطع بین متغیرهای توضیحی را در نظر نمی‌گیرد (جملاتی مانند $X_{2i}X_{3i}$)، در حالی که اگر گزینه فوق را همراه با cross term انتخاب کنیم، حاصل‌ضرب‌های متقاطع را نیز در نظر می‌گیرد. نتایج آزمون وایت به‌صورت جدول زیر نشان داده می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: GOVERNMENT AND GR...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Heteroskedasticity Test: White

| | | | |
|---|---|---|---|
| F-statistic | 1.695178 | Prob. F(9,24) | 0.1452 |
| Obs*R-squared | 13.21369 | Prob. Chi-Square(9) | 0.1532 |
| Scaled explained SS | 11.62044 | Prob. Chi-Square(9) | 0.2356 |

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 01/23/11 Time: 19:41
Sample: 1346 1379
Included observations: 34

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -155.1392 | 113.2886 | -1.369415 | 0.1835 |
| GL | 11.33672 | 6.814221 | 1.663685 | 0.1092 |
| GL^2 | -0.432020 | 0.247380 | -1.746387 | 0.0935 |
| GL*GK | 0.110189 | 0.119207 | 0.924348 | 0.3645 |
| GL*SG | -0.431259 | 0.333643 | -1.292578 | 0.2085 |
| GK | -1.736099 | 4.263417 | -0.407208 | 0.6875 |
| GK^2 | 0.109187 | 0.064568 | 1.691051 | 0.1038 |
| GK*SG | 0.052044 | 0.242705 | 0.214432 | 0.8320 |
| SG | 16.12752 | 12.74878 | 1.265025 | 0.2180 |
| SG^2 | -0.378120 | 0.353650 | -1.069184 | 0.2956 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.388638 | Mean dependent var | 16.52234 |
| Adjusted R-squared | 0.159377 | S.D. dependent var | 25.20729 |
| S.E. of regression | 23.11143 | Akaike info criterion | 9.358460 |
| Sum squared resid | 12819.32 | Schwarz criterion | 9.807390 |
| Log likelihood | -149.0938 | Hannan-Quinn criter. | 9.511558 |
| F-statistic | 1.695178 | Durbin-Watson stat | 2.462716 |
| Prob(F-statistic) | 0.145172 | | |

مقدار F و همچنین $\chi^2 = nR^2$ و احتمال‌های مربوطه نشان می‌دهد که این مدل، واریانس ناهمسانی ندارد. در واقع بر اساس F در سطح ۵ درصد، وجود واریانس ناهمسانی رد می‌شود. توجه شود که مقدار احتمال برای F برابر با ۱۴/۵۲ درصد به‌دست آمده است) در اینجا چون $nR^2$ نیز محاسبه شده است در قسمت بالای جدول با Obs*R-squared نشان داده شده است. لذا آزمون LM و وایت همراه با هم صورت گرفته است.

### ۵-۳-٤ تخمین ضرایب با وجود واریانس ناهمسانی

**روش حداقل مربعات وزنی (WLS) یا روش حداقل مربعات تعمیم‌یافته (GLS)**

برای توصیف روش GLS یا WLS، ابتدا حالت ساده‌ای را در نظر بگیرید که مدل $K$ متغیره دارای واریانس ناهمسانی است. فرض کنید که واریانس $u_t$ برابر با $\sigma_t^2$ است که ناشی از $X_{jt}$ می‌باشد.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_j X_{jt} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t \qquad (۴-۳۶)$$

$$\mathrm{var}(u_t) = E(u_t^2) = \sigma_t^2 = \sigma^2 X_{jt}^2$$

برای حل مشکل واریانس ناهمسانی، طرفین معادله رگرسیون را بر $X_{jt}$ تقسیم می‌کنیم (اگر طرفین را بر $\sigma_t$ که برابر با $\sigma X_{jt}$ است تقسیم کنیم، همین نتیجه به‌دست می‌آید):

$$\frac{Y_t}{X_{jt}} = \beta_1 \frac{1}{X_{jt}} + \beta_2 \frac{X_{2t}}{X_{jt}} + \cdots + \beta_j + \cdots + \beta_K \frac{X_{Kt}}{X_{jt}} + \frac{u_t}{X_{jt}}$$

متغیرهای فوق را که بر $X_{jt}$ تقسیم شده‌اند با علامت ستاره و همچنین $\frac{1}{X_{jt}}$ را با $X_{1t}^*$ نشان می‌دهیم:

$$Y_t^* = \beta_j + \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \cdots + \beta_K X_{Kt}^* + u_t^* \qquad (۴-۳۷)$$

می‌توان نشان داد که مدل فوق دارای واریانس همسانی است:

$$\mathrm{var}(u_t^*) = E(u_t^{*2}) = E(\frac{u_t^2}{X_{jt}^2}) = \frac{E(u_t^2)}{X_{jt}^2} = \frac{\sigma_t^2}{X_{jt}^2} = \frac{\sigma^2 X_{jt}^2}{X_{jt}^2} = \sigma^2$$

بنابراین می‌توان مدل فوق را با روش OLS تخمین زد، زیرا واریانس ناهمسانی ندارد.

در حالت کلی، شکل ماتریس معادله $K$ متغیره به‌صورت زیر است.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u} \qquad (۴-۳۸)$$

ماتریس واریانس $\mathbf{u}$ عبارت است از:

$$\mathbf{\Omega} = \mathrm{var}(\mathbf{u}) = E(\mathbf{uu}') = E\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

$$= E\begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad (۴-۳۹)$$

اگر $u_i$ها خودهمبستگی نداشته باشند آنگاه $\sigma_{ij} = 0$ خواهد بود و لذا $\mathbf{\Omega}$ یک ماتریس قطری خواهد بود.

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad (۴-۴۰)$$

اگر واریانس همسانی برقرار باشد، آنگاه $\mathbf{\Omega}$ برابر است با:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}_n \qquad (۴-۴۱)$$

از طرف دیگر، تخمین‌زنندهٔ OLS برای $\boldsymbol{\beta}$ و $\sigma^2$ به‌صورت زیر است[1]:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \qquad (۴-۴۲)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-K} = \frac{\sum e_i^2}{n-K} \quad , \quad \hat{\mathbf{\Omega}} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{I}_n \qquad (۴-۴۳)$$

اگر از (۴-۳۸) به‌جای $\mathbf{y}$ در (۴-۴۲) جایگذاری کنیم به $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$ می‌رسیم.

حال واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= E(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' = E\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}\mathbf{u}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'E(\mathbf{u}\mathbf{u}')(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \end{aligned} \qquad (۴-۴۴)$$

بنابراین اگر شرط واریانس همسانی برقرار باشد، در این صورت $\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ است و لذا توزیع تخمین‌زنندهٔ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ عبارت است از:

---

[1] فصل سوم بخش ۱۰-۳ را ببینید.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} \sim N\left(\boldsymbol{\beta}\,,\,\sigma^{2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right) \qquad (۴-۴۵)$$

اما اگر واریانس همسانی برقرار نباشد، در این صورت توزیع $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ با روش OLS عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} \sim N\left(\boldsymbol{\beta}\,,(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right) \qquad (۴-۴۶)$$

مقایسه نتایج (۴-۴۵) و (۴-۴۶) نشان می‌دهد که اگر مدل رگرسیون دارای واریانس ناهمسانی باشد و آن را نادیده بگیریم، در این صورت تخمین واریانس‌ها به‌درستی انجام نخواهد شد. برای حل این مشکل، ابتدا بایستی مدل را به‌گونه‌ای تبدیل کنیم که واریانس ناهمسانی آن برطرف شود و سپس $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ را تخمین بزنیم. این روش معروف به حداقل مربعات تعمیم‌یافته (GLS)[1] یا حداقل مربعات وزنی (WLS)[2] است.

به منظور استفاده از روش حداقل مربعات تعمیم‌یافته، مشابه معادله (۴-۳۷) عمل می‌کنیم که طرفین آن را بر عاملی که موجب واریانس ناهمسانی شده است، تقسیم می‌کنیم. در اینجا بحث مذکور را در حالت عمومی به‌کار می‌بریم. بدین منظور توجه کنیم که اگر ماتریس $\boldsymbol{\Omega}$ مثبت معین باشد می‌توان آن را به‌صورت $\boldsymbol{\Omega}^{-1}=\mathbf{P}'\mathbf{P}$ نوشت که در اینجا $\mathbf{P}=\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$ است. از طرف دیگر، چون $\boldsymbol{\Omega}$ متقارن است لذا $\mathbf{P}=\mathbf{P}'$ است. حال طرفین معادله را در $\mathbf{P}$ ضرب می‌کنیم (در واقع آن را بر عامل واریانس ناهمسانی تقسیم کرده‌ایم، زیرا $\mathbf{P}=\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}$ است).

$$\mathbf{Py}=\mathbf{PX}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{Pu} \qquad (۴-۴۷)$$

مدل فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{y}_*=\mathbf{X}_*\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}_* \;\;;\;\; \mathbf{y}_*=\mathbf{Py} \;\;,\;\; \mathbf{X}_*=\mathbf{PX} \;\;,\;\; \mathbf{u}_*=\mathbf{Pu} \qquad (۴-۴۸)$$

$$\mathbf{y}_*=\mathbf{Py}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{Y_1}{\sigma_1}\\ \frac{Y_2}{\sigma_n}\\ \vdots\\ \frac{Y_n}{\sigma_n}\end{bmatrix}$$

[1]Generalized Least Squares
[2]Weighted Least Squares

$$\mathbf{X}_* = \mathbf{PX} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{K1} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{K2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & X_{2n} & \cdots & X_{Kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \frac{X_{21}}{\sigma_1} & \cdots & \frac{X_{K1}}{\sigma_1} \\ \frac{1}{\sigma_2} & \frac{X_{22}}{\sigma_2} & \cdots & \frac{X_{K2}}{\sigma_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{\sigma_n} & \frac{X_{2n}}{\sigma_n} & \cdots & \frac{X_{Kn}}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_* = \mathbf{Pu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_1}{\sigma_1} \\ \frac{u_2}{\sigma_1} \\ \vdots \\ \frac{u_n}{\sigma_n} \end{bmatrix}$$

تخمین $\boldsymbol{\beta}$ برای مدل (۴-۴۸) معروف به تخمین‌زنندهٔ GLS است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} &= (\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1}(\mathbf{X}_*'\mathbf{y}_*) = [(\mathbf{PX})'(\mathbf{PX})]^{-1}[(\mathbf{PX})'(\mathbf{Py})] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{PX})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{Py}) = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}) \end{aligned} \qquad (۴-۴۹)$$

**تخمین دو مرحله‌ای**

تا اینجا دیدیم که تخمین‌زنندهٔ $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ در صورت واریانس ناهمسانی برابر با (۴-۴۹) است که $\boldsymbol{\Omega}$ برابر است با:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

استفاده از (۴-۴۹) برای محاسبه $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ نیازمند مقادیر $\mathbf{X}$، $\mathbf{y}$ و $\boldsymbol{\Omega}$ است. به‌هرحال مقادیر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{y}$ را داریم اما $\boldsymbol{\Omega}$ و عناصر آن یعنی $\sigma_i^2$ مجهول است. لذا بایستی تخمین آنها یعنی $\hat{\sigma}_i^2$ را داشته باشیم تا با استفاده از $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ بتوانیم تخمین $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ را به‌دست آوریم. این روش معروف به روش حداقل مربعات تعمیم‌یافتهٔ قابل دسترس (FGLS)[1] است.

[1] Feasible Generalized Least Squares

برای محاسبه واریانس‌ها نیاز به باقیمانده‌ها (خطاها) داریم. تصور کنید که $\sigma_t^2 = \mathbf{z}_t'\boldsymbol{\alpha}$ است که $\boldsymbol{\alpha}$ بردار ضرایب و $\mathbf{z}_t$ بردار متغیرهایی است که موجب واریانس ناهمسانی شده‌اند ($\mathbf{z}_t$ ممکن است شامل $\mathbf{x}_t$ نیز باشد). در این صورت، ماتریس $\boldsymbol{\Omega}$ وابسته به ضرایب $\boldsymbol{\alpha}$ است که بایستی آنها را برآورد کنیم. از طرف دیگر اگر $e_t$ جملات خطای مدل (۴-۳۶) یا (۴-۳۸) باشد، در این صورت، با استفاده از رابطه $E(e_t^2) = \sigma_t^2$ خواهیم داشت:

$$e_t^2 = \sigma_t^2 + v_t = \mathbf{z}_t'\boldsymbol{\alpha} + v_t \qquad (۴-۵۰)$$

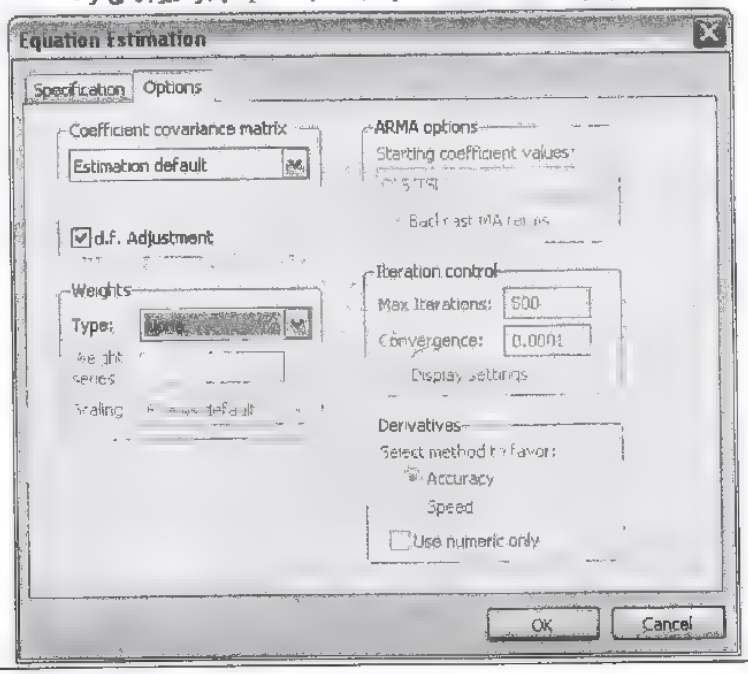
با برآورد مدل فوق، $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ به‌دست می‌آید و با استفاده از $\hat{\sigma}_t^2 = \mathbf{z}_t'\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ را حساب کرده و ماتریس $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ را تشکیل می‌دهیم. لذا تخمین‌زنندهٔ FGLS عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{FGLS} = (\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\mathbf{y}) \qquad (۴-۵۱)$$

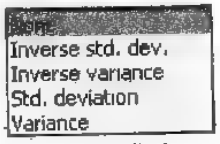
روش دیگر برای برآورد ضرایب، استفاده از روش حداکثر درستنمایی است که در فصل هفتم بحث شده است.

**روش GLS در Eviews** — **فایل** data2

**با تخمین معادله موردنظر، در پنجرهٔ Equation Estimation با انتخاب Option پنجرهٔ زیر باز می‌شود:**



در این پنجره در قسمت Type نوع وزنی را که به داده‌ها می‌خواهیم بدهیم، مشخص می‌کنیم. به‌عنوان مثال اگر بخواهیم وزنها را متناسب با واریانس بدهیم بایستی گزینه Variance را انتخاب کنیم. همچنین اگر بخواهیم از معکوس واریانس به‌عنوان وزن استفاده کنیم بایستی از گزینه Inverse Variance استفاده کنیم. مشابه این دو گزینه برای انحراف معیار نیز وجود دارد.




در مرحله بعد بایستی وزن مورد نظر را در قسمت Weight Series وارد کنیم. به‌عنوان مثال اگر گزینه Inverse variance را انتخاب و 1/X را به‌عنوان وزن بدهیم، در این صورت مشابه آن است که طرفین معادله رگرسیون را بر X تقسیم کرده‌ایم.

در قسمت Scaling سه گزینه وجود دارد. گزینه Average بدان معنا است که Eviews وزن‌ها را به گونه‌ای مقیاس‌بندی می‌کند که جمع آنها برابر با تعداد مشاهدات (T) گردد. گزینه Eviews default مقیاس وزن‌ها را طوری تعیین می‌کند که حاصل‌جمع جذر وزن‌ها برابر با تعداد مشاهدات (T) گردد.

فرض کنید در معادله نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) به این نتیجه رسیده‌ایم که دارای واریانس ناهمسانی است. همچنین فرض کنید نتیجه گرفته‌ایم که واریانس ناهمسانی ناشی از متغیر GL است. بدین منظور طرفین معادله را بر GL تقسیم کرده و آن را تخمین می‌زنیم. برای استفاده از روش WLS ، طبق آنچه که گفته شد، در قسمت Weight series عبارت 1/GL و در قسمت Type گزینه Inverse variance را انتخاب می‌کنیم. نتایج تخمین عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/25/11 Time: 04:14
Sample (adjusted): 1350 1380
Included observations: 25 after adjustments
Weighting series: 1/GL
Weight type: Inverse variance (no scaling)

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 1.364219 | 0.342602 | 3.981932 | 0.0006 |
| GK | 0.202553 | 0.101569 | 1.994232 | 0.0587 |
| BG | 0.030358 | 0.068688 | 0.441963 | 0.6628 |

Weighted Statistics

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.502315 | Mean dependent var | 3.711109 |
| Adjusted R-squared | 0.457070 | S.D. dependent var | 2.730447 |
| S.E. of regression | 2.454677 | Akaike info criterion | 4.746034 |
| Sum squared resid | 132.5596 | Schwarz criterion | 4.892299 |
| Log likelihood | -56.32542 | Hannan-Quinn criter. | 4.786602 |
| Durbin-Watson stat | 0.928161 | Weighted mean dep. | 4.362945 |

Unweighted Statistics

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.611113 | Mean dependent var | 7.353941 |
| Adjusted R-squared | 0.575760 | S.D. dependent var | 7.034155 |
| S.E. of regression | 4.581606 | Sum squared resid | 461.8045 |
| Durbin-Watson stat | 1.042760 | | |

## ٤-٤ فرض سوم: عدم خودهمبستگی [1]

عدم خودهمبستگی بینَ جملات خطا یکی از فروض اساسی برای روش OLS است. همبستگی خطاها با یکدیگر را اصطلاحاً «خودهمبستگی» یا «همبستگی سریالی» می گویند. برای بررسی خودهمبتگی، از برآورد خطاها (یعنی $e_t$) استفاده می‌شود. به‌طور کلی خودهمبستگی بیانگر رابطه بین $e_t$ با وقفه‌های آن است.

### ٤-٤-١ مفهوم وقفه [2]

مقدار وقفهٔ هر متغیری مانند $X_t$ برابر با مقدار آن در زمان قبلی( $X_{t-1}$ ) می‌باشد. به‌عنوان مثال مقادیر $X_t$ و وقفه آن را می توان در جدول زیر نشان داد:

| زمان | $X_t$ | $X_{t-1}$ | $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$ |
|---|---|---|---|
| ۱۳۸۰ | ۱ | - | |
| ۱۳۸۱ | ۲ | ۱ | ۲-۱=۱ |
| ۱۳۸۲ | ۴ | ۲ | ۴-۲-۲ |
| ۱۳۸۳ | -۲ | ۴ | -۲-۴=-۶ |
| ۱۳۸۴ | -۳ | -۲ | -۳-(-۲)=-۱ |
| ۱۳۸۵ | ۰ | -۳ | ۰-(-۳)=۳ |
| ۱۳۸۶ | ۵ | ۰ | ۵-۰=۵ |

به‌عنوان مثال در سال ۱۳۸۲، مقدار $X$ در این سال را مقدار جاری و مقدار آن در سال قبل (سال ۱۳۸۱) را مقدار $X$ با «یک وقفه» می گویند. تفاضل این دو مقدار ( $\Delta X_t$ ) بیانگر تفاضل مرتبه اول است که مقدار تغییرات $X$ در سال جاری نسبت به سال قبل را نشان می‌دهد.

### ٤-٤-١ پیامدهای خودهمبستگی

اگر معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ دارای خودهمبستگی به‌صورت $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ باشد ولی آن را نادیده بگیریم، پیامدهای زیر را خواهد داشت:

۱- تخمین‌زننده‌های OLS همچنان بدون تورش هستند، زیرا این موضوع مربوط به فرض اول $(E(u_t) = 0)$ است که خودهمبستگی موجب نقض آن نمی‌شود.

۲- تخمین‌زننده‌های OLS سازگارند، زیرا این موضوع مربوط به فرض غیرتصادفی بودن $X_t$ یا عدم همبستگی بین $u_t$ و $X_t$ است که خودهمبستگی موجب نقض آن نمی‌شود. این بدان معنا است که با افزایش حجم نمونه، واریانس $\hat{\beta}$ به صفر گرایش دارد.

---

[1] autocorrelation
[2] lag

۳- تخمین‌زننده OLS کارا نخواهد بود و واریانس $\hat{\beta}$ برابر با $\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$ نمی‌باشد، زیرا:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\hat{\beta}) &= E(\hat{\beta}-\beta)^2 = E\left(\sum_t w_t u_t\right)^2 \quad , \quad w_t = \frac{x_t}{\sum x_t^2} \\ &= E(\sum_t w_t^2 u_t^2) + E(2\sum_t \sum_{\substack{s \\ t>s}} w_t w_s u_t u_s) \\ &- \sum_t w_t^2 E(u_t^2) + 2\sum_t \sum_{\substack{s \\ t>s}} w_t w_s E(u_t u_s)\end{aligned}$$

با توجه به $E(u_t u_s)=\rho^{t-s}\sigma^2$ و $E(u_t^2)=\sigma^2$، خواهیم داشت ($\rho^{t-s}$ ضریب همبستگی $u_t$ و $u_s$ است)[1]:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} + 2\sum_t \sum_{\substack{s \\ t>s}} w_t w_s \rho^{t-s}\sigma^2 \qquad (۴-۵۲)$$

بنابراین، واریانس $\hat{\beta}$ برابر با $\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}$ نخواهد بود. لذا برآوردهای OLS منجر به تورش در تخمین واریانس $\hat{\beta}$ می‌شود که مقدار آن بستگی به حاصل‌جمع دوم در سمت راست رابطه فوق دارد. اگر $u_t$ها خودهمبستگی مثبت (یعنی $0<\rho<1$) و $X_t$ها نیز خودهمبستگی مثبت داشته باشند[2]، آنگاه حاصل جمع مذکور، مثبت بوده و لذا واریانس $\hat{\beta}$ در روش OLS کمتر از حد، برآورد می‌شود. این نیز به‌نوبه خود موجب بزرگ شدن $t$ها خواهد شد.

### ۴-۴-۲ روش‌های نموداری جهت تشخیص خودهمبستگی

یکی از راه‌های ساده جهت تشخیص خودهمبستگی، استفاده از نمودار خطاها ($e_t$) است. بدین منظور برای بررسی رابطه بین $e_t$ و $e_{t-1}$، می‌توان $e_t$ را در مقابل $e_{t-1}$ ترسیم نمود. با ترسیم این داده‌ها، حالت‌های مختلفی را می‌توان مشاهده نمود. به‌عنوان مثال اگر نموداری مانند (۴-۳) مشاهده کنیم، بیانگر وجود خودهمبستگی مثبت می‌باشد[3].

---

[1] برای اثبات این رابطه، می‌توان از تعاریف زیر استفاده نمود:

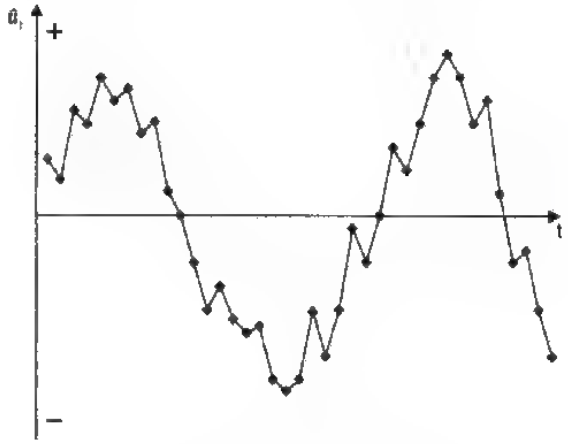
$$\rho^{t-s} = \frac{\operatorname{cov}(u_t,u_s)}{\sqrt{\operatorname{var}(u_t)}\sqrt{\operatorname{var}(u_s)}} = \frac{E(u_t u_s)}{\sigma^2}$$

زیرا $\operatorname{var}(u_t)=\operatorname{var}(u_s)=\sigma^2$ است. به‌عنوان مثال $\rho=\frac{E(u_t u_{t-1})}{\sigma^2}$ و $\rho^2=\frac{E(u_t u_{t-2})}{\sigma^2}$ است.

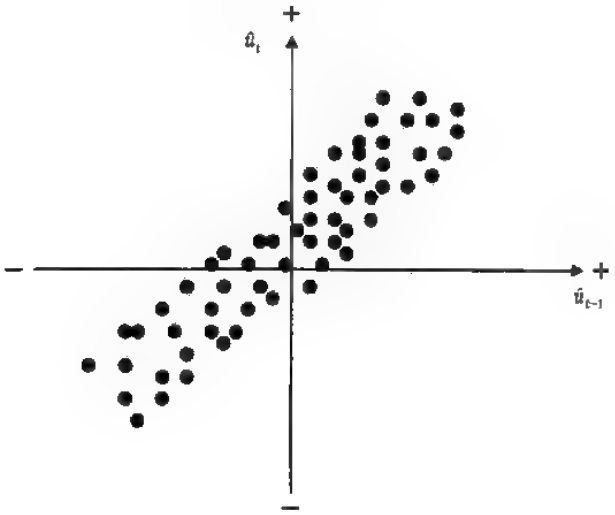
[2] این بدان معنا است که $\sum w_t w_s = \frac{\sum x_t x_s}{(\sum x_t^2)^2} > 0$ باشد، زیرا صورت کسر بیانگر $\operatorname{cov}(x_t,x_s)$ است.

[3] این نمودارها از Brooks (2008) می‌باشد.

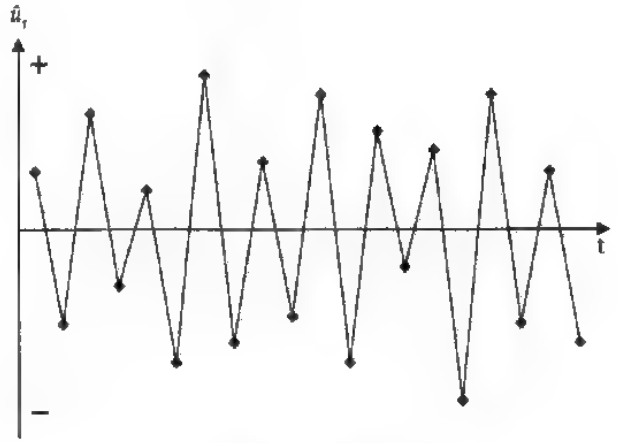
از طرف دیگر اگر مشاهدات مربوط به خطاها ($e$) را در مقابل زمان ترسیم کنیم، نمودار (۲ ۴) به دست خواهد آمد. نمودارهای (۲-۴) و (۳-۴) دقیقاً یکسان هستند. در واقع «خودهمبستگی مثبت» که از نمودار (۳-۴) مشاهده می‌شود، می‌توان آن را در نمودار (۲-۴) به‌صورت تغییرات منظم $e$ در طول زمان، مشاهده نمود. نمودار (۴-۴) و (۵-۴) خودهمبستگی منفی را نشان می‌دهد.



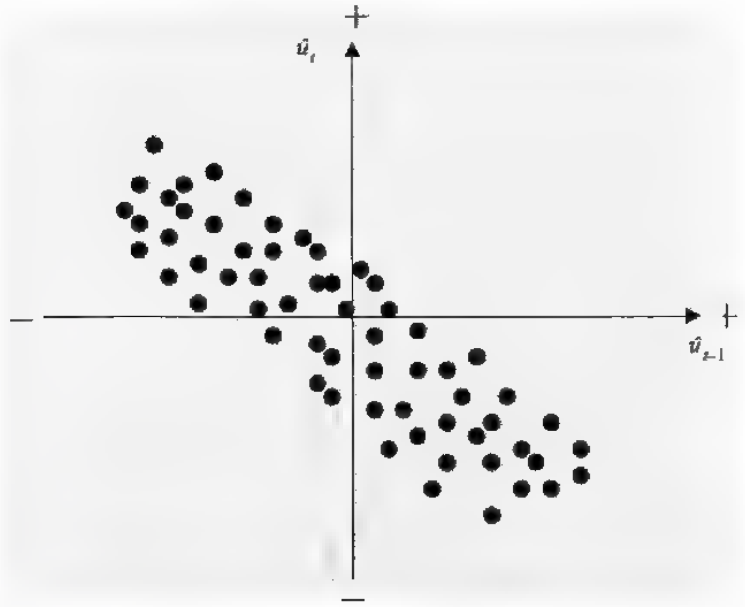

نمودار ۲-٤: خودهمبستگی مثبت




نمودار ۳ ٤: خودهمبستگی مثبت



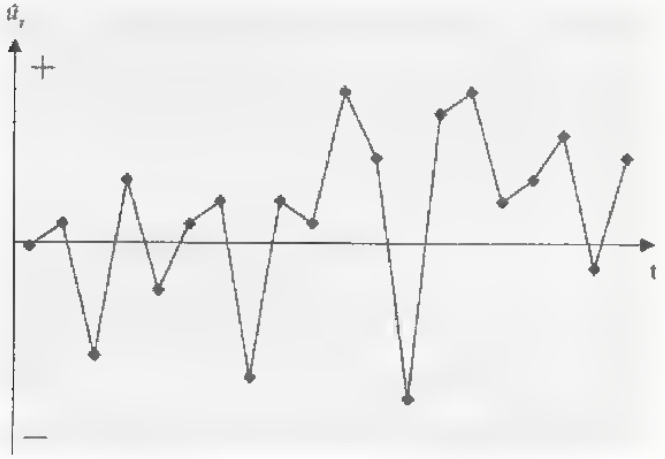

نمودار ٤-٤: خودهمبستگی منفی



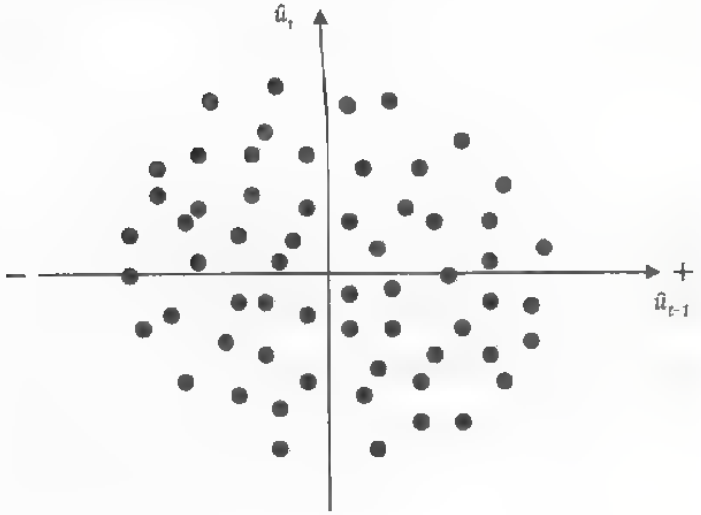

نمودار ٥-٤: خودهمبستگی منفی

بنابراین اگر جملات خطا دارای خودهمبستگی باشند بیانگر این است که در طول زمان به‌طور منظم تغییر می‌کنند و این در حالی است که بایستی تغییرات آنها کاملاً تصادفی باشد. مثالی از تصادفی بودن جملات خطا در نمودارهای (۶-۴) و (۷-۴) نشان داده شده است. نمودار (۶-۴)

نشان می‌دهد که تغییرات جملات خطا در طول زمان از هیچ قاعده خاصی تبعیت نمی‌کند و کاملاً تصادفی است. نمودار (۷-۴) نیز نشان می‌دهد که بین جملات خطا در دوره فعلی و دوره قبلی هیچ ارتباط خاصی وجود ندارد و اگر بین $u_t$ و $u_{t-1}$ ضریب همبستگی را حساب کنیم و یا رگرسیون بین آنها را برآورد نماییم، هیچ رابطه معناداری به دست نخواهد آمد.




نمودار ٦-٤: عدم خودهمبستگی




نمودار ۷-٤: عدم خودهمبستگی

### ۳-۴-۴ آزمون دوربین- واتسون

قدم اول در شناسایی خودهمبستگی این است که نمودار آنها را به شرحی که گفته شد، ترسیم کنیم. اما در عمل، روش‌های نموداری و تحلیل آنها مشکل است و لذا برخی روش‌های آماری جهت آزمون خودهمبستگی ارائه شده است. یکی از آزمون‌های متداول، آزمون دوربین- واتسون (۱۹۵۱) می‌باشد. این آزمون که به‌اختصار با $DW$ نشان داده می‌شود، برای تشخیص خودهمبستگیِ مرتبه اول به‌کار می‌رود، زیرا فقط خودهمبستگی بین مقادیر سال جاری و سال قبل را در نظر می‌گیرد:

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \quad , \quad v_t \sim N(0, \sigma_v^2) \qquad (۴-۵۳)$$

در آزمون $DW$، فرضیه‌ها به‌صورت زیر مطرح می‌شوند:

$$H_0: \rho = 0 \quad \text{عدم خودهمبستگی} \qquad (۴-۵۴)$$
$$H_1: \rho \neq 0 \quad \text{وجود خودهمبستگی}$$

فرضیه $H_0$ بیانگر عدم خودهمبستگی است، یعنی خطاهای زمان $t-1$ و $t$ مستقل از هم می‌باشند که در این صورت $u_t = v_t$ بوده و لذا $u_t$ کاملاً تصادفی است. از آنجا که اطلاعاتی راجع به $u_t$ نداریم لذا از برآورد آنها یعنی $e_t$ استفاده می‌کنیم. بر اساس $e_t$ها، آماره $DW$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2} \qquad (۴-۵۵)$$

در (۴-۵۵) صورت کسر، مقادیر خطا در سال $t$ و سال $t-1$ را مقایسه می‌کند. اگر خطاها دارای خودهمبستگیِ مثبت باشند، صورت کسر نسبتاً کوچک خواهد شد، زیرا در این حالت، علامت $e_t$ و $e_{t-1}$ تقریباً یکسان بوده (مانند نمودار ۲-۴ و ۳-۴) و تفاضل آنها کوچک خواهد شد. اما اگر خودهمبستگی منفی وجود داشته باشد، صورت کسر نسبتاً بزرگ خواهد شد، زیرا علامت $e_t$ و $e_{t-1}$ تقریباً مخالف می‌باشد (مانند نمودار ۴-۴ و ۵-۴).

برای ساده نمودن $DW$، صورت کسر را بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2 = \sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}$$

اما از آنجا که اختلاف چندانی بین $\sum e_t^2$ و $\sum e_{t-1}^2$ وجود ندارد، لذا تقریباً یکسان هستند:

$$\sum_{t=2}^{n} e_t^2 = e_2^2 + e_3^2 + \ldots + e_n^2 \cong \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_{n-1}^2$$

تفاوت این دو عبارت در این است که اولی $e_1^2$ و دومی $e_n^2$ را ندارد. به‌هرحال با یکسان گرفتن این دو عبارت، خواهیم داشت:

$$DW \cong \frac{2\sum_{t=2}^{n} e_t^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2} = 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_t^2}\right)$$

از طرف دیگر، تخمین $\rho$ بر اساس معادله (۴-۲۲) و با استفاده از $e_t$ به‌جای $u_t$، برابر است با:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_t e_{t-1}}{\sum e_t^2}$$

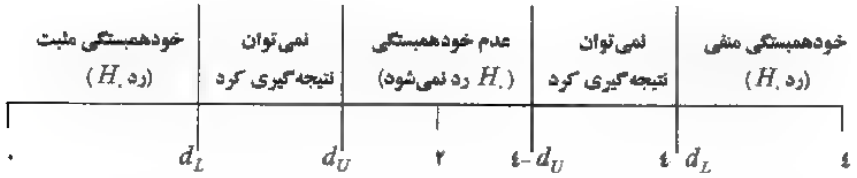
$\hat{\rho}$ ضریب همبستگی $e_t$ و $e_{t-1}$ را نشان می‌دهد که برآورد $\rho$ است. حال می‌توان $DW$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$DW \cong 2(1 - \hat{\rho}) \qquad (۴\text{-}۵۶)$$

طبق (۴-۵۶) اگر $\hat{\rho} = 0$ باشد در این صورت $DW=2$ است و به معنی عدم خودهمبستگی است. از طرف دیگر اگر $\rho = +1$ باشد به معنی «خودهمبستگی کامل مثبت» است که در این حالت $DW = 0$ می‌باشد. همچنین اگر $\rho = -1$ باشد در این صورت $DW= 4$ می‌باشد که به معنی «خودهمبستگی کامل منفی» است.

اما برای بحث دقیق‌تر راجع به وجود یا عدم وجود خودهمبستگی بایستی مقدار آماره $DW$ را با مقادیر بحرانی مقایسه کنیم. به‌دلیل اینکه آماره $DW$ رابطهٔ خاصی با توزیع‌های شناخته شده مانند $t$، $F$ و $\chi^2$ ندارد، لذا برای $DW$ جداول جداگانه‌ای تشکیل شده است. در این جدول $K$ تعداد

ضرایب به استثنای عرض از مبدأ است و $n$ تعداد مشاهدات می‌باشد. قضاوت راجع به وضعیت خودهمبستگی طبق نمودار زیر می‌باشد:




بدین ترتیب اگر $DW$ به اندازه کافی به ۲ نزدیک باشد، به معنی عدم خودهمبستگی است. اما اگر به صفر نزدیک باشد، خودهمبستگیِ مثبت و اگر به ۴ نزدیک باشد، خودهمبستگیِ منفی را نشان می‌دهد.

مثال ۱-٤: فرض کنید که مدل زیر با $n=۸۰$ مشاهده برآورد شده است:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t$$

فرض کنید که برای این مدل $DW = ۱/۲۵$ به دست آمده باشد. برای قضاوت راجع به خودهمبستگی، مقادیر زیر با توجه به اینکه تعداد ضرایب بااستثنای عرض از مبدأ برابر ۳ و $n=۸۰$ است، از جدول آماره دوربین- واتسون به دست آمده است:

$$d_L = ۱/۵۶ \quad , \quad d_U = ۱/۷۲$$
$$۴ - d_U = ۲/۲۸ \quad , \quad ۴ - d_L = ۲/۴۴$$

چون $DW = ۱/۲۵$ کمتر از $d_L = ۱/۵۶$ می‌باشد لذا این معادله دارای خودهمبستگی مثبت می‌باشد.

اما برای اینکه آزمون $DW$ معتبر باشد، بایستی شرایط زیر برقرار باشد:

۱- معادله رگرسیون بایستی دارای جمله ثابت باشد.

۲- متغیرهای توضیحی بایستی غیرتصادفی باشند.

۳- متغیر وابسته تأخیری نباید در مدل وارد شده باشد.

در رابطه با مشکل سوم فرض کنید معادله رگرسیون به‌صورت زیر باشد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \theta Y_{t-1} + u_t \qquad (۴-۵۷)$$

در این صورت برای بررسی خودهمبستگی از آماره دیگری به نام $h$ دوربین استفاده می‌شود که عبارت است از:

$$h=\hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-n\,\mathrm{var}(\hat{\theta})}}\quad,\quad \hat{\rho}=1-\frac{DW}{2} \qquad (۴-۵۸)$$

برای $n$های نسبتاً بزرگ، $h$ دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس ۱ می‌باشد. لذا توزیع $h$، نرمال استاندارد خواهد بود. برای هر توزیع نرمال استاندارد رابطه زیر برقرار است:

$$P(-1/96\le h\le 1/96)=0/95 \qquad (۴-۵۹)$$

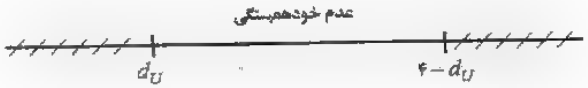
بنابراین اگر $h$ بین ۱/۹۶- و ۱/۹۶ قرار بگیرد در این صورت به معنی «عدم خودهمبستگی» است. اگر $h$ کوچکتر از ۱/۹۶- باشد بیانگر خودهمبستگی منفی و اگر بزرگتر از ۱/۹۶ باشد به معنی خودهمبستگیِ مثبت است.

مشکل دیگر در خصوص آزمون $DW$ این است که در برخی موارد، مقدار $DW$ در ناحیه عدم تصمیم‌گیری قرار می‌گیرد. در چنین شرایطی ثابت می‌شود که تقریباً $d_U$ مقدار بحرانی جهت معنی‌دار بودن آزمون خودهمبستگی می‌باشد. حالت‌های مختلفی وجود دارد که عبارتند از:

الف) برای آزمون $\rho=0$ در مقابل $\rho>0$ اگر $DW<d_U$ باشد، در این صورت $\rho=0$ در سطح احتمال $\alpha$ رد می‌شود و معادله دارای خودهمبستگی مثبت است.

ب) برای آزمون $\rho=0$ در مقابل $\rho<0$ اگر $DW>4-d_U$ یا $4-DW<d_U$ باشد، در این صورت $\rho=0$ در سطح احتمال $\alpha$ رد می‌شود و خودهمبستگی منفی وجود دارد.

ج) برای آزمون $\rho = ۰$ در مقابل $\rho \neq ۰$ اگر $DW < d_U$ یا $۴ - DW < d_U$ باشد، در این صوت $\rho = ۰$ در سطح احتمال $۲\alpha$ رد می‌شود و معادله دارای خودهمبستگی مثبت یا منفی است[1].




**آزمون دوربین- واتسون در Eviews**

وقتی معادله‌ای با Eviews برآورد می‌شود، همراه با نتایج آن، مقدار آماره DW نیز تحت عنوان Durbin-Watson Stat ارائه می‌دهد. با داشتن مقدار آماره DW و مقایسه آن با مقادیر بحرانی که از جدول مربوطه به دست می‌آید، می‌توان راجع به وجود خودهمبستگی قضاوت نمود.

### ٤-٤-٤ آزمون بروش-گادفری[2]

به‌خاطر داریم که روش دوربین- واتسون برای آزمون خودهمبستگی مرتبه اول است. بنابراین آزمون $DW$ فقط برای شرایط خاص خود قابل کاربرد می‌باشد و اشکال دیگر خودهمبستگی را آزمون نمی‌کند.

به‌عنوان مثال اگر همبستگی بین $e_t$ و $e_{t-۱}$ وجود نداشته ولی همبستگی بین $e_t$ و $e_{t-۲}$ وجود داشته باشد، در این صورت $DW$ نمی‌تواند هیچ توضیحی راجع به این نوع از خودهمبستگی ارائه نماید. یک راه این است که در محاسبه $DW$ به‌جای $e_{t-۱}$ از $e_{t-۲}$ استفاده کنیم. در این صورت ضریب همبستگی بین $e_t$ و $e_{t-۲}$ محاسبه می‌شود. اما در عمل در نرم‌افزارهای مرسوم، چنین مواردی در نظر گرفته نشده است و همچنین جداولی برای مقادیر بحرانی آن محاسبه نشده است.

برای حل مشکل فوق یک آزمون عمومی در نظر گرفته شده که می‌تواند خودهمبستگی مرتبه $r$ام را آزمون کند. بدین منظور معادله زیر که خودهمبستگی مرتبه $r$ام را نشان می‌دهد، در نظر بگیرید:

$$u_t = \rho_۱ u_{t-۱} + \rho_۲ u_{t-۲} + \cdots + \rho_r u_{t-r} + v_t \ , \ v_t \sim N(۰, \sigma_v^۲) \qquad (۴-۶۰)$$

فرضیه‌های مورد نظر عبارتند از:

$$H_۰: \rho_۱ = ۰ , \rho_۲ = ۰ , \ldots , \rho_r = ۰ \ \text{عدم‌خودهمبستگی} \qquad (۴-۶۱)$$

$$H_۱: \rho_۱ \neq ۰ \ \text{یا} \ \rho_۲ \neq ۰ \ \text{یا} \ \ldots \ \text{یا} \ \rho_r \neq ۰ \ \text{وجود خودهمبستگی}$$

[1] Gujarati(2004), P.471
[2] Breusch-Godfrey

تحت فرضیه $H_0$ ، خطاهای سال جاری هیچ ارتباطی با $r$ مقادیر قبلی خود ندارند. مراحل انجام این آزمون عبارت است از:

۱- معادله مورد نظر را با روش OLS برآورد می‌کنیم:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t$$

۲- $e_t$ را حساب کرده و آن را روی متغیرهای توضیحی و خطاهای تأخیری برازش کرده و $R^2$ آن را حساب می‌کنیم:

$$e_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \alpha_3 X_{3t} + \alpha_4 X_{4t} + \rho_1 e_{t-1} + \cdots + \rho_r e_{t-r} + v_t \qquad (۴-۶۲)$$

اگر تعداد مشاهدات برابر با $n$ باشد، در این صورت می‌توان برای آزمون این فرضیه از $\chi^2$ استفاده نمود:

$$(n-r)R^2 \sim \chi^2_r \qquad (۴-۶۳)$$

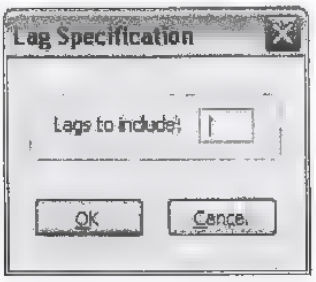
توجه شود که در اینجا تعداد مشاهدات برای برآورد معادله $e_t$ فقط $n-r$ می‌باشد. اگر مقدار آماره $(n-r)R^2$ بزرگتر از مقدار بحرانی (که از جدول به دست می‌آید) باشد، در این صورت فرضیه $H_0$ رد می‌شود و معادله رگرسیون دارای خودهمبستگی است. هر چند آزمون بروش-گادفری عمومی‌تر از آزمون $DW$ است ولی مشکل آن در تعیین $r$ یعنی تعداد وقفه‌ها، است.

**آزمون بروش- گادفری در Eviews** **فایل** data2

برای انجام آزمون بروش-گادفری جهت شناسایی خودهمبستگی، ابتدا معادله مورد نظر را تخمین می‌زنیم. سپس در پنجره‌ای که نتایج تخمین نشان داده شده است (پنجره Equation) مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

View → Residual Diagnostic → Serial Correlation LM Test

در این حالت پنجره Lag Specification باز می‌شود:




که بایستی تعداد وقفه‌ها (۲) را به آن بدهیم. با انتخاب OK، معادله $e_t$ یعنی معادله ۲۲-٤ برآورد می‌شود.

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

| | | | |
|---|---|---|---|
| F-statistic | 0.641424 | Prob. F(2,30) | 0.5336 |
| Obs*R-squared | 1.435281 | Prob. Chi-Square(2) | 0.4879 |

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 01/25/11 Time: 05:18
Sample: 1346 1380
Included observations: 35
Presample missing value lagged residuals set to zero.

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 0.110183 | 1.001510 | 0.110017 | 0.9131 |
| GL | -0.017235 | 0.186703 | -0.092311 | 0.9271 |
| GK | -0.009106 | 0.093942 | -0.096837 | 0.9234 |
| RESID(-1) | 0.209243 | 0.186655 | 1.121017 | 0.2712 |
| RESID(-2) | -0.054389 | 0.201551 | -0.269852 | 0.7891 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.041008 | Mean dependent var | 1.32E-15 |
| Adjusted R-squared | -0.086858 | S.D. dependent var | 4.129714 |
| S.E. of regression | 4.305328 | Akaike info criterion | 5.889148 |
| Sum squared resid | 556.0756 | Schwarz criterion | 6.111340 |
| Log likelihood | -98.06008 | Hannan-Quinn criter. | 5.965848 |
| F-statistic | 0.320712 | Durbin-Watson stat | 1.925825 |
| Prob(F-statistic) | 0.861846 | | |

در اینجا نیز مجدداً مقادیر F و $(n-r)R^2$ با احتمال‌های مربوطه نشان می‌دهد که این مدل خودهمبستگی ندارد، مقدار F و همچنین $\chi^2=(n-r)R^2=۳۵(۰/۰۴۱)=۱/۴۳$ کوچک هستند و در ناحیه بحرانی قرار ندارند و لذا فرضیه $H_0$ رد نمی‌شود.

## ٥-٤-٤ پیامد نادیده گرفتن خودهمبستگی

اگر خودهمبستگی وجود داشته باشد ولی آن را نادیده بگیریم، تخمین ضرایب بدون تورش ولی ناکارآ می‌باشند. این ناکارایی حتی در نمونه‌های بزرگ نیز از بین نمی‌رود و انحراف معیارها دارای خطا می‌باشند[1]. این امر منجربه استنتاج‌های نادرست می‌شود. در حالتی که خودهمبستگی

---

۱- به‌عنوان مثال در $Y_t=\alpha+\beta_1X_t+u_t$ که $u_t$ خود همبستگی مرتبه اول به‌شکل $u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t$ دارد، در این حالت تخمین زنندهٔ OLS برای $\beta$ که به صورت $\hat{\beta}=\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}$ است، دارای واریانس زیر می‌باشد:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta})=\frac{\sigma^2}{\sum x_t^2}+2\frac{\sigma^2}{(\sum x_t^2)^2}\left(\rho\sum_{t=1}^{n-1}x_t x_{t+1}+\rho^2\sum_{t=1}^{n-2}x_t x_{t+2}+\cdots+\rho^{n-1}x_1x_n\right)$$

مثبت وجود داشته باشد انحراف معیارها کمتر از حد واقعی برآورد می‌شوند. بدین معنی که در این حالت، روش OLS انحراف معیار را کم برآورد می‌کند. در نتیجه موجب افزایش $t$ها شده و ضرایب برآورد شده گرایش به معنادار شدن دارند و لذا مرتکب خطای نوع اول (رد $H_0$ در حالی که $H_0$ یک فرضیه درست است) می‌شویم. علاوه بر این، اگر خودهمبستگیِ مثبت وجود داشته باشد و آن را نادیده بگیریم به احتمال زیاد منجربه افزایش مقدار $R^2$ می‌شود زیرا خودهمبستگی، مقدار واریانس جمله خطا را کم برآورد می‌کند.

### ۶-۴-۴ تخمین ضرایب در حالت خودهمبستگی

اگر شکل خودهمبستگی را بدانیم می‌توان به سادگی از روش OLS استفاده نمود. یکی از روش‌های شناخته شده برای تخمین ضرایب در حالت خودهمبستگی، روش کوکران- اورکات[1] می‌باشد. این روش معمولاً برای خودهمبستگی مرتبه اول طرح شده است. بدین منظور مدل زیر را در نظر بگیرید که در آن $u_t$ دارای خودهمبستگی مرتبه اول است:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad (۴-۶۴)$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + v_t \qquad (۴-۶۵)$$

فرض کنید که $u_t$ دارای میانگین صفر باشد. مدل فوق را با یک دوره تأخیر نوشته و در $\rho$ ضرب می‌کنیم:

$$\rho Y_{t-1} = \rho\beta_1 + \rho\beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1} \qquad (۴-۶۶)$$

حال (۴-۶۶) را از (۴-۶۴) کم می‌کنیم:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) + (u_t - \rho u_{t-1}) \qquad (۴-۶۷)$$

در (۴-۶۷) به‌جای پرانتز آخر از رابطه (۴-۶۵) قرار می‌دهیم:

$$Y_t - \rho Y_{t-1} = \beta_1(1-\rho) + \beta_2(X_t - \rho X_{t-1}) + v_t \qquad (۴-۶۸)$$

با تعریف $Y_t - \rho Y_{t-1} = Y_t^*$، $\beta_1^* = \beta_1(1-\rho)$ و $X_t - \rho X_{t-1} = X_t^*$، معادله (۴-۶۸) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t^* = \beta_1^* + \beta_2 X_t^* + v_t \qquad (۴-۶۹)$$

[1] Cocran-Orkat

از آنجا که مدل (۶۹-۴) خودهمبستگی ندارد، لذا می‌توان آن را با روش OLS تخمین زد. اما مدل (۶۹-۴) مبتنی بر داده‌های جدیدی است که به‌صورت $Y_t^*$ و $X_t^*$ هستند. محاسبهٔ چنین داده‌هایی نیاز به مقدار $\rho$ دارد. در عمل مقدار $\rho$ معلوم نیست. یکی از روش‌های ساده این است که ابتدا با تخمین مدل (۶۴-۴) مقدار $DW$ را به‌دست آورده و با استفاده از رابطه $DW = ۲(۱-\hat{\rho})$، مقدار $\hat{\rho}$ را حساب نمود. سپس بر اساس $\hat{\rho}$، مقادیر جدید یعنی $X_t^*$ و $Y_t^*$ را محاسبه نموده و آنگاه مدل (۶۹-۴) را با روش OLS برآورد نمائیم.

روش تکراری کوکران-اورکات یکی از روش‌های متداول است که مراحل آن به‌صورت زیر است:

۱- ابتدا معادله $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ را با روش OLS برآورد کرده و باقیمانده‌ها ($\hat{u}_t$ یا $e_t$) را حساب می‌کنیم.

۲- بر اساس باقیمانده‌های مرحله اول، مدل $\hat{u}_t = \rho\hat{u}_{t-1} + v_t$ یا $e_t = \rho e_{t-1} + v_t$ را برآورد می‌کنیم که تخمین $\hat{\rho}$ به دست می‌آید:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum e_{t-1} e_t}{\sum e_t^2} \qquad (۴-۷۰)$$

۳- با استفاده از $\hat{\rho}$ مقادیر $X_t^*$ و $Y_t^*$ را حساب کرده و سپس روش OLS را برای تخمین مدل (۳۹-۴) به‌کار می‌بریم.

۴- تکرار مراحل ۲ و ۳: در اینجا ابتدا در مرحله ۳ مقادیر خطاها را حساب کرده و مجدداً مرحله ۲ را تکرار می‌کنیم تا به تخمین جدیدی از $\hat{\rho}$ برسیم و سپس با $\hat{\rho}$ جدید به مقادیر جدیدی برای $X_t^*$ و $Y_t^*$ می‌رسیم و بر اساس آنها مجدداً مدل (۵۹-۴) را برآورد می‌کنیم. این تکرارها تا جایی ادامه می‌یابد که مقدار $\hat{\rho}$ تقریباً ثابت بماند و با تکرار مرحلهٔ بعدی، تغییر محسوسی در آن ایجاد نشود. در چنین شرایطی معمولاً عدد کوچکی را برای همگرایی $\hat{\rho}$ در نظر می‌گیرند. مثلاً اگر از یک مرحله به مرحله دیگر تغییرات $\hat{\rho}$ کمتر از ۰/۰۰۱ باشد، در این صورت $\hat{\rho}$ تقریباً به مقدار ثابتی رسیده است. اگر مقدار $\hat{\rho}$ در مرحلهٔ $m$ را با $\hat{\rho}_m$ و در مرحلهٔ $m+1$ را با $\hat{\rho}_{m+1}$ نشان دهیم، در این صورت هدف این است که تکرارها تا جایی ادامه یابد که شرط $|\hat{\rho}_m - \hat{\rho}_{m+1}| < ۰/۰۰۱$ تأمین شود.

نگاه دیگر به موضوع خودهمبستگی این است که آن را به‌جای یک «مشکل»، یک «فرصت» می‌داند. بدین معنی که «وجود خودهمبستگی» به معنی یک «اطلاعات مهم» است و این نشان از تصریح نامناسب مدل دارد. وقتی $\hat{u}_t$ها همبستگی داشته باشند، بدان معنا است که مدل‌سازی $Y_t$ مناسب نبوده است و ساختار پویای آن را در نظر نگرفته‌ایم. در واقع در داخل $u_t$ها عامل یا متغیری وجود دارد که باعث همبستگی سریالی بین آنها شده است و لذا به‌جای رفع خودهمبستگی، باید مدل‌سازی $Y_t$ را تغییر داده و آن را پویا نمائیم.

### ۷-٤-٤ خودهمبستگی و مدل‌های پویا

مدل‌ها که تاکنون بررسی نمودیم مدل‌های ایستا هستند. به‌عنوان مثال مدل ایستای یک متغیره عبارت است از:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t \qquad (۴-۷۱)$$

مدل (۴-۷۱) بیانگر یک رابطه ایستا و آنی بین متغیرهاست به‌گونه‌ای که اگر $X$ در زمان $t$ تغییر کند منجر به تغییر آنی در $Y$ خواهد شد. اما این تحلیل را می‌توان به‌صورت پویا بیان نمود و مدل (۴-۷۱) را به‌صورت زیر نوشت که مشابه مدل (۴-۶۸) می‌باشد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-1} + u_t \qquad (۴-۷۲)$$

در مدل (۴-۷۲) علاوه بر رابطهٔ بین مقدار جاری متغیرها، بین مقدار آنها در طی زمان‌های مختلف نیز ارتباط برقرار شده است. به‌گونه‌ای که اگر $X$ در سال $t-1$ تغییر کند، هم بر $Y$ در سال $t$ و هم بر $Y$ در سال $t-1$ اثر خواهد گذاشت. برای بررسی این اثرات، می‌توان معادله (۴-۷۲) را به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_{t-1} = \beta_1 + \beta_2 X_{t-1} + \gamma_1 X_{t-2} + \gamma_2 Y_{t-2} + u_{t-1} \qquad (۴-۷۳)$$

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-1} + u_t \qquad (۴-۷۴)$$

$$Y_{t+1} = \beta_1 + \beta_2 X_{t+1} + \gamma_1 X_t + \gamma_2 Y_t + u_{t+1} \qquad (۴-۷۵)$$

$$Y_{t+2} = \beta_1 + \beta_2 X_{t+2} + \gamma_1 X_{t+1} + \gamma_2 Y_{t+1} + u_{t+2} \qquad (۴-۷۶)$$

اگر $X_{t-1}$ تغییر کند طبق معادله (۴-۷۳) بر $Y_{t-1}$ اثر می‌گذارد. از طرف دیگر طبق معادله (۴-۷۴) هم $X_{t-1}$ و هم $Y_{t-1}$ بر $Y_t$ اثر می‌گذارند. همچنین طبق معادله (۴-۷۵)، تغییرات $Y_t$ بر $Y_{t+1}$ اثر می‌گذارد. این تغییرات همچنان ادامه می‌یابد.

مدل‌هایی که فقط شامل متغیرهای توضیحیِ تأخیری باشند موسوم به مدل‌های باوقفه توزیعی[1] هستند. اما مدل‌ها که در آنها هم متغیر توضیحی و هم متغیر وابسته دارای وقفه باشند، موسوم به مدل‌های باوقفه توزیعی خودرگرسیونی (ARDL)[2] می‌باشند که در فصل دهم بررسی شده‌اند.

حال سؤال این است که چرا باید وقفه‌ها را وارد یک مدل کنیم؟

مقادیر باوقفهٔ متغیرهای توضیحی یا متغیر وابسته به معنی این است که ساختار مدل، پویا می‌باشد. یکی از دلایل مهمی که در این زمینه وجود دارد، کُندی تعدیل متغیر وابسته است. اغلب اوقات تغییرات متغیر توضیحی اثر خود را به‌طور آنی بر متغیر وابسته نمی‌گذارد، بلکه اثرات آن نیاز به گذشت زمان دارد. به‌عنوان مثال تغییر در سیاست دولت ممکن است نیاز به گذشت چند ماه یا سال داشته باشد تا بتواند اثرات خود را بر متغیرهای اقتصادی بگذارد. همچنین در بازارهای مالی مانند بورس وقتی تغییری رخ می‌دهد و به‌صورت اطلاعات جدید دریافت می‌شود، ممکن است افراد به‌طور آنی به آن واکنش نشان ندهند، بلکه به‌صورت تدریجی خود را با آن تطبیق دهند. سرعت و مقدار واکنش آنها همچنین بستگی به این دارد که آیا آنها تغییرات را دائمی می‌دانند یا موقتی. همچنین تأخیر در واکنش ممکن است ناشی از عوامل نهادی و فنی باشد. به‌عنوان مثال وجود فناوری‌های پیشرفته می‌تواند به سرعت خرید و فروش سهام کمک نماید و از این رو واکنش‌ها را سریع‌تر می‌نماید.

**خودهمبستگی و مدل‌های پویا در Eviews**

فایل lagdist

در Eviews می‌توان متغیرهای $X_t$، $X_{t-1}$، $X_{t-2}$، $Y_{t-1}$ را به‌عنوان متغیر توضیحی به مدل مورد نظر اضافه نمود. در این حالت آنها را به‌صورت X، X(-1)، X(-2) و Y(-1) وارد معادله می‌کنیم.

اگر سرمایه‌گذاری خصوصی(IP) را روی نرخ بهره حقیقی (RR) برازش کنیم، این معادله با اجرای فرمان LS IP C RR برآورد می‌شود که نتایج آن عبارت است از:

[1] Distributed lag
[2] Autoregressive Distributed Lag

Equation: UNTITLED Workfile: S3::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 01/25/11 Time: 06:00
Sample: 1345 1375
Included observations: 31

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 20571.71 | 2295.966 | 8.959940 | 0.0000 |
| RR | -427.0836 | 209.5619 | 2.037789 | 0.0508 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.125267 | Mean dependent var | 23205.95 |
| Adjusted R-squared | 0.095093 | S.D. dependent var | 11106.10 |
| S.E. of regression | 10564.86 | Akaike info criterion | 21.43079 |
| Sum squared resid | 3.24E+09 | Schwarz criterion | 21.52331 |
| Log likelihood | -330.1773 | Hannan-Quinn criter. | 21.46095 |
| F-statistic | 4.152594 | Durbin-Watson stat | 0.812045 |
| Prob(F-statistic) | 0.050785 | | |

از آنجا که DW=۰/۸۱ می‌باشد، لذا این معادله دارای خودهمبستگی است. همان‌طور که اشاره شد، خودهمبستگی یکی از علائم نادرست بودن مدل است. حال مدل را به‌صورت پویا در نظر گرفته و متغیر وابسته تأخیری را به آن اضافه می‌کنیم، برای برآورد این مدل فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

LS IP C RR IP(-1)

نتیجه حاصله عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: S3::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 01/25/11 Time: 06:07
Sample (adjusted): 1346 1375
Included observations: 30 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | 7229.362 | 3132.899 | 2.307563 | 0.0299 |
| RR | 41.49133 | 168.3648 | 0.246437 | 0.8072 |
| IP(-1) | 0.736791 | 0.137058 | 5.375770 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.561056 | Mean dependent var | 23816.94 |
| Adjusted R-squared | 0.528541 | S.D. dependent var | 10752.63 |
| S.E. of regression | 7363.198 | Akaike info criterion | 20.74644 |
| Sum squared resid | 1.47E+08 | Schwarz criterion | 20.88656 |
| Log likelihood | -308.1966 | Hannan-Quinn criter. | 20.79127 |
| F-statistic | 17.25560 | Durbin-Watson stat | 2.229264 |
| Prob(F-statistic) | 0.000015 | | |

برای بررسی خودهمبستگی از h دوربین استفاده می‌کنیم، زیرا این مدل دارای متغیر وابسته تأخیری است:

$$h=\left(1-\frac{DW}{2}\right)\sqrt{\frac{n}{1-n\,var(\hat{\theta})}}=\left(1-\frac{2/23}{2}\right)\sqrt{\frac{30}{1-(30)(0/1371)^2}}=-0/9765$$

چون مقدار ۰/۹۷۶۵- در فاصله (۱/۹۶ و ۱/۹۶-) قرار دارد، لذا وجود خودهمبستگی رد می‌شود.

### ۸-٤-٤ خودهمبستگی و فرایندهای خودرگرسیون (AR)[1] و میانگین متحرک (MA)[2]

فرایند خودهمبستگی مرتبه اول که به شکل $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$ است را AR(۱) می‌گویند که معروف به خودرگرسیون مرتبه اول است. همچنین $u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$ را فرایند AR(۲) می‌گویند که بیانگر خودهمبستگی مرتبه دوم است. اما نوع دیگری از این فرایندها را می‌توان تعریف کرد که معروف به میانگین متحرک (MA) هستند. به‌عنوان مثال اگر خودهمبستگی به‌شکل $u_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ باشد آن را میانگین متحرک مرتبه اول می‌گویند که با MA(۱) نشان داده می‌شود. اینکه چگونه فرایند MA بیانگر خودهمبستگی است، می‌توان آن را به AR تبدیل نمود. همچنین می‌توان فرایند AR نیز تحت شرایطی، تبدیل به MA نمود. قابلیت تبدیل این فرایندها و جزئیات آن در فصل یازدهم بحث شده است. به‌عنوان مثال می‌توان AR(۱) را به‌صورت $u_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots$ نوشت که بیانگر MA(∞) است.

علاوه بر نکات فوق، در معادله $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$، اگر $\rho = -1$ باشد، آنگاه معادله (۴-۶۷) را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$Y_t + Y_{t-1} = 2\beta_1 + \beta_2(X_t + X_{t-1}) + (u_t + u_{t-1})$$

با تقسیم طرفین بر ۲ خواهیم داشت:

$$\frac{Y_t + Y_{t-1}}{2} = \beta_1 + \beta_2 \frac{X_t + X_{t-1}}{2} + \frac{u_t + u_{t-1}}{2} \qquad (۴-۴۷)$$

معادله فوق بیانگر میانگین متحرک متغیرها است.

به‌هرحال، نتیجه کلی بحث فوق آن است که اگر معادله رگرسیون دارای خودهمبستگی باشد، ممکن است از یکی از فرایندهای AR یا MA تبعیت کند و لذا برای حل مشکل خودهمبستگی می‌توان فرایندهای AR یا MA را در نظر گرفت.

**رفع خودهمبستگی با استفاده از AR و MA در Eviews**

در Eviews می‌توان معادله رگرسیون را همراه با AR و MA تخمین زد. به‌عنوان مثال برای رفع خودهمبستگی مرتبه اول می‌توان فرایند AR(1) را در نظر گرفت و با فرمان LS Y C X AR(1) آن را تخمین زد. همچنین برای MA(1) از فرمان LS Y C X MA(1) استفاده می‌شود. علاوه بر این، می‌توان هر دو را با فرمان LS Y C X AR(1) MA(1) برآورد نمود.

[1] Autoregressive
[2] Moving Average

### ۵-٤ فرض ٤: غیر تصادفی بودن متغیرهای توضیحی

غیرتصادفی بودن متغیرهای تصادفی ($X_i$ ها) یکی از فروض کلاسیک است که موجب می‌شود تا تخمین‌زننده‌های OLS بدون تورش باشند. غیرتصادفی بودن $X_i$ موجب استقلال آن از متغیر تصادفی $u_i$ می‌گردد. اما اگر $X_i$ تصادفی باشد، تخمین‌زننده‌های OLS مجدداً سازگار و بدون تورش خواهند بود. بدین منظور تخمین‌زننده OLS را در نظر بگیرید که عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u} \qquad (۴-۷۸)$$

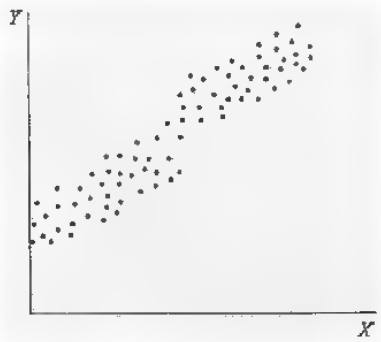
امید ریاضی $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ عبارت است از:

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}E(\mathbf{X}'\mathbf{u}) \qquad (۴-۷۹)$$

برای آنکه $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ بدون تورش باشد، لازم است که $\mathbf{X}$ و $\mathbf{u}$ مستقل باشند، هرچند که $\mathbf{X}$ تصادفی باشد.

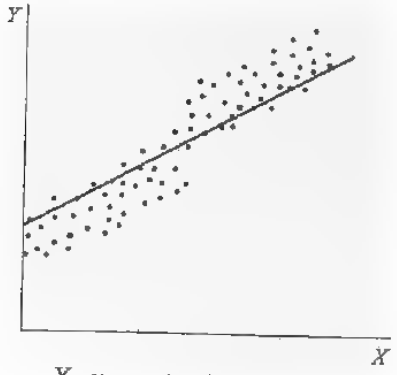
با فرض مستقل بودن $\mathbf{X}$ و $\mathbf{u}$، رابطه $E(\mathbf{X}'\mathbf{u})=E(\mathbf{X}')E(\mathbf{u})=\mathbf{0}$ برقرار است و لذا $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ بدون تورش خواهد بود. اما مشکل زمانی به‌وجود می‌آید که $\mathbf{X}$ و $\mathbf{u}$ مستقل نباشند. در این صورت $E(\mathbf{X}'\mathbf{u}) \neq 0$ است و لذا $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ تخمین‌زنندهٔ بدون تورش نخواهد بود.

همبستگی بین $u_i$ و $X_i$ می‌تولند ناشی از عوامل مختلفی باشد. به‌عنوان مثال اگر مشاهدات $Y$ و $X$ مانند نمودار زیر باشد، در این صورت رگرسیون دچار شکستگی شده است (فصل ششم را ببینید) و بدون توجه به آن، رگرسیون را برآورد کرده‌ایم.




نمودار ۸-٤

با ترسیم خط رگرسیون، وضعیت باقیمانده‌ها روشن‌تر می‌شود.




نمودار ۹-٤: همبستگی مثبت بین $u$ و $X$

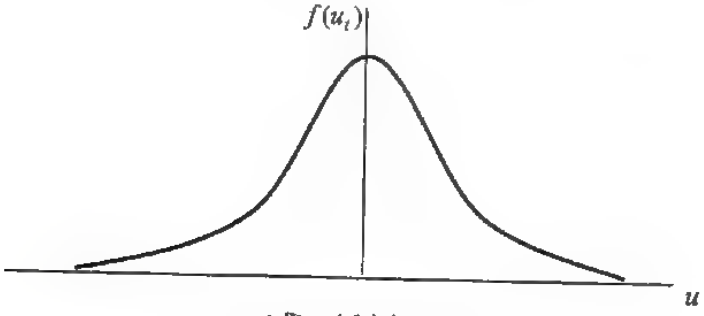
نمودار فوق نشان می‌دهد که با افزایش $X$ مقادیر جملهٔ خطا افزایش می‌یابد، زیرا به‌ازای $X_i$ های کوچک، $u_i$ها منفی هستند و به‌ازای $X_i$ های بزرگ، $u_i$ها مثبت می‌باشند. این مثالی از همبستگی مثبت بین $u$ و $X$ است.

### ٤-٦ فرض ٥: فرض نرمال بودن $u_i$

یکی از فروض مربوط به جمله خطاها این است که $u_i$ توزیع نرمال دارد.

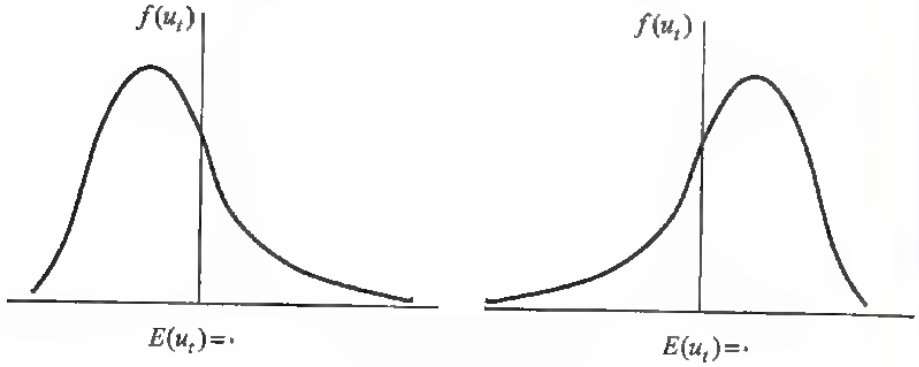
$$u_i \sim N(\cdot, \sigma^2) \qquad (۴-۸۰)$$

به‌خاطر داریم که تمام آزمون‌های مربوط به معنادار بودن ضرایب مبتنی بر فرض نرمال بودن $u_i$ است. اگر $u_i$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر باشد، آنگاه در اطراف میانگین خود به‌صورت متقارن توزیع می‌شود.




نمودار ۱۰-٤: توزیع متقارن

اما اگر $u_t$ نرمال نباشد، ممکن است قرینه نباشد و دارای چولگی باشد.




نمودار ۱۱-۴: توزیع‌های نامتقارن (چوله)

از طرف دیگر $\frac{u_t-E(u_t)}{\sigma}=\frac{u_t}{\sigma}$ توزیع نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس ۱ دارد. هر توزیع نرمال استاندارد اولاً قرینه است، یعنی ضریب چولگی آن صفر است و ثانیاً ضریب کشیدگی آن برابر با ۳ می‌باشد. بنابراین، برای بررسی انحراف از توزیع نرمال، بایستی ضرایب چولگی و کشیدگی را محاسبه و بررسی نماییم.

جارکیو و برا[1] (۱۹۸۱) ایدهٔ فوق را در قالب یک آزمون ارائه نمودند. برای متغیر تصادفی $u$ با امید ریاضی صفر و واریانس $\sigma^2$، ضرایب چولگی ( $A_1$ ) و کشیدگی ( $A_2$ ) عبارتند از:

$$A_1=\frac{E(u_t^3)}{\sigma^3} \quad , \quad A_2=\frac{E(u_t^4)}{\sigma^4} \qquad (۴-۵۱)$$

اگر $u_t$ قرینه باشد، آنگاه $A_1$ تقریباً صفر است. همچنین اگر $A_2$ نزدیک به ۳ باشد در این صورت کشیدگی $u_t$ به نرمال استاندارد نزدیک است و $A_2-3$ نیز تقریباً صفر خواهد بود. بنابراین،اگر $u_t$ نرمال باشد $A_1$ و $A_2-3$ تقریباً صفر خواهند بود. بر این اساس، آماره جارکیو- برا برای آزمون نرمال بودن عبارت است از:

$$JB=n\left(\frac{A_1^2}{6}+\frac{(A_2-3)^2}{24}\right) \qquad (۴-۵۲)$$

[1] Jarque and Bera

تابع $JB$ تحت فرضیه $H_0$ (فرضیه‌ای که طبق آن، $u$ نرمال است) به توزیع $\chi^2$ با درجه آزادی ۲ گرایش دارد که مقدار بحرانی آن برابر با $\chi^2_{0.99,2} = 5/99$ است. برای محاسبه $JB$ می‌توان $A_1$ و $A_2$ را با استفاده از $e_t$ها محاسبه نمود. بدین منظور بایستی $E(u_t^3)$ و $E(u_t^4)$ و همچنین $E(u_t^2) = \sigma^2$ را برآورد نماییم. تخمین $E(u_t^3)$ و $E(u_t^4)$ برابر است با:

$$\hat{E}(u_t^3) = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^3}{n}$$
$$\hat{E}(u_t^4) = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^4}{n} \qquad (۴-۵۳)$$

اگر $A_1$ یا $A_2$ و یا هر دو آنها بزرگ باشند، آنگاه مقدار $\chi^2$ را افزایش داده و در ناحیه بحرانی قرار می‌گیرد که فرضیه $H_0$ (نرمال بودن $e_t$) را رد می‌کند و بدین معنی است که $u_t$ از نظر چولگی یا کشیدگی، اختلاف زیادی با توزیع نرمال دارد.

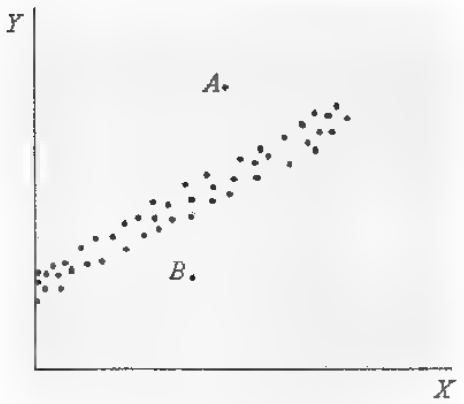
**آزمون نرمال بودن با استفاده از Eviews** فایل data2

برای آزمون نرمال بودن ابتدا معادله اصلی را برآورد کرده و سپس در پنجره‌ای که نتایج تخمین را نشان می‌دهد، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

View → Residual Diagnostics → Histogram−Normality Test

اگر باقیمانده‌ها به‌صورت نرمال توزیع شده باشند، نمودار آن تقریباً به‌صورت نرمال است و آماره JB معنی‌دار نمی‌باشد. این بدان معنا است که در چنین شرایطی مقدار آمارهٔ JB کوچک می‌باشد و مقدار احتمال که در زیر آماره JB داده می‌شود، بزرگتر از ۰/۰۵ است. در واقع بزرگ بودن احتمال معادل با کوچک بودن آمارهٔ JB است که در این صورت فرضیه نرمال بودن رد نمی‌شود. بر عکس اگر مقدار احتمال کوچک باشد مقدار آمارهٔ JB بزرگ خواهد بود و لذا فرضیه نرمال بودن رد می‌شود. به‌طور کلی اگر JB>۵/۶۶ باشد، نرمال بودن رد می‌شود، در این صورت مقدار احتمال که در زیر آماره JB داده می‌شود کوچکتر از ۰/۰۵ خواهد بود.

به‌عنوان مثال در رگرسیون نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) روی رشد نیروی کار (GL) و رشد سرمایه (GK)، نتایج آن در پنجره Equation نشان داده می‌شود. در این پنجره از منوی View آزمون نرمال بودن را بررسی می‌کنیم که نتایج عبارت است از:




نمودار ۱۲-۴: مشاهدات دور افتاده

وجود مشاهدات دورافتاده موجب کشیدگی بیش از حد می‌شود و لذا آن را تبدیل به یک توزیع دم‌پهن می‌کند. این پدیده‌های است که در داده‌های بورس معمولاً مشاهده می‌شود.

مشاهدات دورافتاده به‌دلیل وقوع حوادث نادر[1] یا به هر دلیل دیگری به وجود می‌آید. یکی از راه‌حل‌های این پدیده، استفاده از متغیرهای مجازی[2] است. جزئیات این بحث در فصل پنجم ارائه شده است. کارکرد متغیرهای مجازی بدین صورت است که می‌تواند اثر مشاهدات دورافتاده را به‌صورت جداگانه لحاظ کند و تأثیر آنها را بر باقیمانده‌ها $(e_t)$ حذف نماید. به‌عنوان مثال فرض کنید که دوره ۸۰-۱۳۵۰ را بررسی می‌کنیم. در یکی از این سالها مثلاً در سال ۱۳۵۷ مقدار متغیر مورد نظر تفاوت فاحشی با بقیه سال‌ها دارد. در اینجا یک متغیر جدید (مثلاً به نام D57) معرفی می‌کنیم که مقدار آن برای سال ۱۳۵۷ برابر با ۱ و برای بقیه سال‌ها برابر با صفر است. در این حالت در مدل جدید، اثر مشاهدهٔ سال ۱۳۵۷ بر روی باقیمانده‌ها تعدیل می‌شود و موجب می‌شود تا باقیمانده‌ها دارای توزیع نرمال باشند.

## مسائل

۱- ثابت کنید اگر رگرسیونی بدون عرض از مبدأ برآورد شود، مجموع پسماندها لزوماً صفر نخواهد بود. اگر $R^2 = 1 - \frac{e'e}{Y'Y - n\bar{Y}^2} = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum y_t^2}$ را حساب کنیم، ممکن است منفی شود.

[1] rare events
[2] dummy variables

۲- نمونه ۵تایی زیر را داریم:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | ٤ | ۲ | ٥ | ۸ | ۲ |
| $Y$ | ٦ | ۳ | ۱۲ | ۱٥ | ٤ |

با فرض اینکه واریانس ناهمسانی از نوع $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t^2$ باشد، برآوردهای $\alpha$، $\beta$ و انحراف معیار معیار آنها را با روش GLS به‌دست آورید.

۳- مواردی را که آزمون دوربین- واتسون قابل کاربرد نیست نام برده و توضیح دهید.

۴- برای بررسی واریانس ناهمسانی، معادله زیر معرفی شده است. آیا می‌توان پارامترها را به روش OLS تخمین زد؟

$$|u_t| = \sqrt{\alpha + \beta X_t} + \varepsilon_t$$

اگر جواب منفی است آیا روشی برای تخمین این پارامترها وجود دارد؟

۵- گفته می‌شود که مدل‌های لگاریتمی توانایی کاهش مسئله واریانس ناهمسانی را دارند. برای مثال مدل $Y_t = aX_t^{\beta}u_t$ زیر را در نظر بگیرید که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\ln Y_t = \alpha + \beta \ln X_t + \ln u_t \quad , \quad \alpha = \ln a$$

الف) اگر بخواهیم امید ریاضی $\ln u_t$ صفر باشد، $u_t$ چه توزیعی باید داشته باشد؟

ب) اگر $E(u_t) = ۱$ باشد، آیا $E(\ln u_t)$ می‌تواند صفر باشد؟

ج) اگر $E(\ln u_t)$ صفر نباشد برای آنکه صفر شود چه می‌توان کرد؟

۶- معادله رگرسیون زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{Y}_t = ۲/۵۵ + ۰/۶۵ Y_{t-۱} + ۳/۴۲ X_t \quad ; \quad n = ۵۰ \quad , \quad DW = ۱/۶۵$$
$$(۲/۲) \quad (۵/۵) \quad (۳/۱)$$

اعداد داخل پرانتز مقادیر $t$ هستند. خودهمبستگی مرتبه اول را آزمون کنید.

۷- مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Z_t + u_t$$

جملهٔ اختلال از فرآیند خودهمبستگی مرتبه دوم پیروی می‌کنند:

$$u_t = \rho_۱ u_{t-۱} + \rho_۲ u_{t-۲} + v_t$$

که $v_t$ فروض کلاسیک را تأمین می‌کند. معادله رگرسیون را تبدیل به معادله‌ای کنید که خودهمبستگی نداشته باشد.

۸- اگر در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ جملهٔ خطا به‌صورت $u_t = \gamma X_t^2 + \varepsilon_t$ باشد،

الف) کدامیک از فروض کلاسیک نقض شده است؟

ب) تحت چه شرایطی تخمین‌زنندهٔ OLS بدون تورش است؟

۹- اگر معادله رگرسیون فاقد عرض از مبدأ باشد، در چه صورتی فرض $E(u_t)=0$ نقض می‌شود؟

۱۰- در مسئله ۱ فصل اول، آزمون وایت را برای تشخیص واریانس ناهمسانی انجام دهید.

۱۱- در مسئله ۱ فصل اول، آیا معادلهٔ $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 Z_i + u_i$ خودهمبستگی مرتبهٔ اول دارد یا نه؟ در صورت وجود خودهمبستگی، آن را رفع کنید.

۱۲- در مسئله ۱ فصل اول، نرخ رشد $Y$ را روی نرخ رشد $X$ و $Z$ برازش کنید. آیا این معادله، خودهمبستگی دارد؟

۱۳ در مسئله ۱ فصل اول، آزمون خودهمبستگی بروش-گادفری را برای معادلهٔ $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 Z_i + u_i$ انجام دهید.

۱۴- در مسئله ۱ فصل اول، آزمون نرمال بودن باقیمانده‌ها را برای هر یک از معادلات زیر انجام دهید:

الف) $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$

ب) $Y_i = \beta_1 + \beta_3 Z_i + u_i$

ج) $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 Z_i + u_i$

۱۵- مدل زیر را در نظر بگیرید که خودهمبستگی از فرایند $MA(1)$ تبعیت می‌کند

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + u_t$$
$$u_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

ثابت کنید که تخمین $\beta$ از روش $OLS$ دارای تورش است:

$$\text{plim}\,\hat{\beta}=\beta+\frac{\theta(1-\beta^2)}{1+\theta^2+2\theta\beta}=\beta+\frac{\theta}{1+\frac{(\theta+\beta)^2}{(1-\beta^2)}}$$

۱۶- استفاده از آماره $DW$ مستلزم وجود عرض از مبدأ و عدم وجود متغیر وابسته تأخیری در سمت راست می‌باشد. اگر این دو شرط نقض شود، مدل زیر را خواهیم داشت:

$$Y_t+\beta Y_{t-1}+u_t$$
$$u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t$$

ثابت کنید که برای آماره $DW$ شرط زیر برقرار است:

$$\text{plim}\,DW=2\left(1-\frac{\rho\beta(\rho+\beta)}{1+\rho\beta}\right)$$

۱۷- معادله $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ دارای واریانس ناهمسانی به شکل $\sigma_t^2=\sigma^2 X_t^{\gamma}$ است. برای رفع واریانس ناهمسانی، چگونه این مدل را برآورد می‌کنید.

۱۹- مدل زیر با $n=30$ مشاهده، برآورد شده است:

$$\hat{Y}_t=4/75+0/88X_t+0/44Y_{t-1} \qquad R^2=0/95$$
$$(2/4)\quad(4/2)\quad(3/5) \qquad DW=2/21$$

آزمون خودهمبستگی را انجام دهید.

۲۰- اگر مدل $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ دارای خودهمبستگی مرتبه دو به‌صورت $u_t=\rho_1 u_{t-1}+\rho_2 u_{t-2}+\varepsilon_t$ باشد، مدل فوق را تبدیل به مدلی کنید که خودهمبستگی نداشته باشد.

۲۱- در مدل $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ اگر خودهمبستگی مرتبه اول وجود داشته باشد، ثابت کنید که ماتریس واریانس $\mathbf{u}$ برابر است با:

$$E(\mathbf{uu}')=\sigma^2\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1}\\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-2}\\ \rho^2 & \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \rho^{n-1} & \rho^{n-1} & \rho^{n-1} & \cdots & \rho^{n-1}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}$ بردار ستونی است که عناصر آن $u_t$ها هستند.

۲۲- رگرسیون بدون عرض از مبدأ را به‌صورت $Y_t = \beta X_t + u_t$ در نظر بگیرید. اگر $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t$ باشد:

الف) وضعیت واریانس ناهمسانی در این مدل را توضیح را توضیح دهیم.

ب) مدل مذکور را با روش OLS برآورد کرده و واریانس آن را حساب کنید.

ج) واریانس ناهمسانی را برطرف کرده و سپس آن را برآورد نمایید.

د) نتایج ب و ج را مقایسه کنید.

## ضمیمه فصل ٤: آزمون‌های نقض فروض در Stata

### آزمون واریانس ناهمسانی در Stata

فایل data3

آزمون‌های واریانس ناهمسانی و بسیاری از آزمون‌های دیگر، با استفاده از باقیمانده‌ها انجام می‌شود. برای محاسبه eها، بعد از تخمین مدل، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
predict e, residuals
```

حال می‌توان خطاها را در مقابل زمان و یا هر متغیر دیگری رسم کرده و خصوصیات آن را بررسی نمود.

#### الف) آزمون وایت

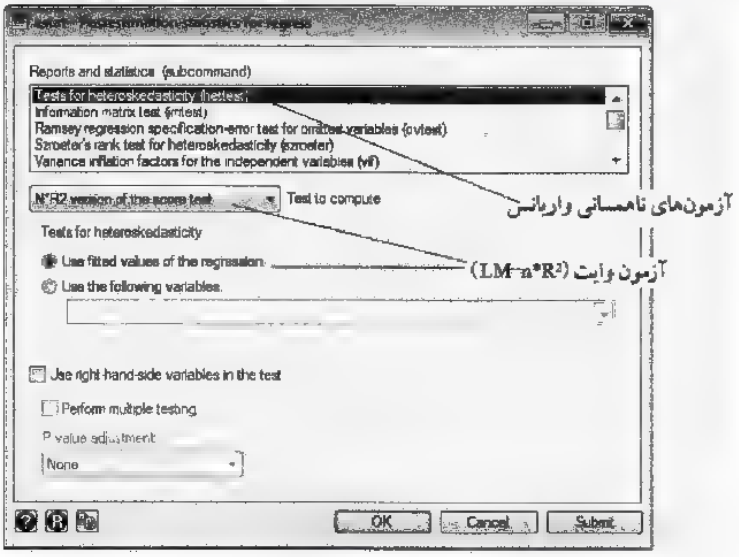
ابتدا معادله مورد نظر را تخمین می‌زنیم:

```
. reg i rr d.yno l.i

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      35
-------------+------------------------------           F(  3,    31) =  184.73
       Model |  4.1221e+10     3  1.3740e+10           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  2.3056e+09    31  74380117.7           R-squared     =  0.9470
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9419
       Total |  4.3527e+10    34  1.2802e+09           Root MSE      =  8624.4

------------------------------------------------------------------------------
           i |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rr |  -246.8273   200.1467    -1.23   0.227    -653.0293    161.3746
             |
         yno |
         D1. |   1.18792   .1583372     7.50   0.000     .8649894    1.510851
             |
           i |
         L1. |   .8194636   .0523257    15.66   0.000     .7127447    .9261825
             |
       _cons |   5742.107   5095.64     1.13   0.268    -4650.52    16134.73
------------------------------------------------------------------------------
```

حال مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Specification test, ets. → regression diagnostics → Linear models and related → Statistics

که پنجره زیر باز می شود:




با انتخاب OK نتیجه آزمون وایت عبارت است از:

```
. estat hettest, iid

Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity
         Ho: Constant variance
         Variables: fitted values of i

         chi2(1)      =    1.47
         Prob > chi2  =   0.2248
```

مقدار آماره آزمون (یعنی ۱/۴۷) در ناحیه بحرانی قرار ندارد (زیرا احتمال کمتر از ۰/۰۵ است) و لذا همسانی واریانس رد نمی‌شود.

آزمون وایت را می توان با فرمان زیر نیز انجام داد:

estat hettest, iid

### ب) آزمون بروش - پاگان

آزمون واریانس ناهمسانی بروش- پاگان را با فرمان hettest بعد از تخمین معادله مورد نظر به دست آورد.

```
. hettest

Breusch-Pagan / Cook-Weisberg test for heteroskedasticity
         Ho: Constant variance
         Variables: fitted values of i

         chi2(1)      =    1.13
         Prob > chi2  =   0.2876
```

مقدار آماره آزمون در ناحیه بحرانی قرار ندارد و لذا فرضیه $H_0$ رد نمی شود یعنی واریانس همسان است.

### برآورد واریانس مستحکم وایت

اگر بخواهیم در معادله رگرسیون، آزمون معنی‌دار بودن ضرایب بر اساس واریانس مستحکم وایت صورت گیرد از فرمان زیر برای برآورد معادله استفاده می‌کنیم:

```
reg y x, vce(robust)
```

به عنوان مثال رگرسیون سرمایه‌گذاری روی نرخ بهره و تغییرات درآمد ملی را در نظر بگیرید که قبلاً برآورد گردید:

t‌ها نیز متفاوت هستند

انحراف معیارهای مستحکم که با انحراف معیارهای روش OLS متفاوت است

ضرایب هیچ تفاوتی نمی‌کنند

```
. reg i rr d.yno l.i, vce(robust)

Linear regression                      Number of obs =      35
                                       F(  3,    31) =  442.55
                                       Prob > F      =  0.0000
                                       R-squared     =  0.9470
                                       Root MSE      =  8624.4

------------------------------------------------------------------------------
             |               Robust
           i |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          rr |  -246.8273   248.583    -0.99   0.328    -753.8156    260.1609
             |
         yno |
         D1. |   1.18792   .1889259     6.29   0.000     .8026033    1.573237
             |
           i |
         L1. |   .8194636   .0451138    18.16   0.000     .7274534    .9114738
             |
       _cons |   5742.107   4667.693     1.23   0.228    -3777.716    15261.93
------------------------------------------------------------------------------
```

### روش GLS در Stata

فرض کنید که عامل واریانس ناهمسانی، متغیر x باشد. مثلاً تابع $\sigma_t^2 = \sigma^2 X_t$ را داشته باشیم. بنابراین در اینجا، وزن‌ها معلوم است و بایستی طرفین معادله را بر $\sqrt{X_t}$ تقسیم کنیم. بدین منظور روش GLS را با فرمان زیر به کار می‌بریم:

```
reg y x [aweight=1/x]
```

توجه شود که Stata، طرفین معادله را بر $\frac{1}{\sqrt{X_t}}$ تقسیم می‌کند.

فرض کنید تابع واریانس به صورت زیر باشد:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Z_t$$

برای استفاده از روش GLS بایستی طرفین معادله را بر $\sigma_t$ تقسیم کنیم. اما چون $\sigma_t$ را نداریم لذا آن را برآورد می‌کنیم. مراحل انجام این کار و تخمین GLS به صورت زیر است:

۱- معادله را تخمین می‌زنیم

```
reg y x
```

۲- $e_t$ ها را حساب می‌کنیم:

```
predict e, residual
```

۳- لگاریتم $e_t^2$ را حساب می‌کنیم:

```
gen lne2=log(e^2)
```

۴- رگرسیون lne2 را روی x و z برآورد می‌کنیم:

```
reg lne2 x z
```

۵- مقادیر به دست آمده از این رگرسیون معادل با برآورد $\sigma_t^2$ است، لذا آنها را با فرمان زیر حساب می‌کنیم:

```
predict lns2, xb
```

۶- چون $\ln s^2 = \log(\hat{\sigma}_t^2)$ است، لذا تخمین واریانس را به صورت زیر حساب می‌کنیم:

```
gen wt=exp(lns2)
```

wt معادل با $\hat{\sigma}_t^2$ است.

۷- حال روش GLS را به صورت زیر اعمال می‌کنیم:

```
reg y x, [aweight=1/wt]
```

توجه شود که در روش GLS طرفین معادله را بر جذر wt تقسیم می‌کنیم. در اینجا نیز ما وزن را به صورت معکوس wt تعریف کرده‌ایم ولی Stata آن را به صورت $\frac{1}{\sqrt{wt}}$ در نظر می‌گیرد.

## آزمون خود همبستگی در Stata

آزمون‌های خودهمبستگی مبتنی بر استفاده از باقیمانده‌ها هستند. برای محاسبه eها، بعد از تخمین مدل، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
predict e, residuals
```

حال می‌توان خطاها را در مقابل زمان و یا هر متغیر دیگری رسم کرده و خصوصیات آن را بررسی نمود. برای رسم eها در مقابل زمان از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

```
tsline e
```

از طرف دیگر برای بررسی دقیق‌تر، می‌توان خطاهای زمان t را در مقابل زمان t-1 رسم نمود:

```
Twoway (scatter e l.e)
```

همچنین می‌توان ضریب همبستگی $e_t$ و $e_{t-1}$ را نیز حساب نمود که برآوردی از $\rho$ می‌باشد. بدین منظور، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
correlate e l.e
```

### آزمون دوربین- واتسون

بدین منظور، بعد از تخمین معادله موردنظر، فرمان زیر اجرا می‌کنیم:

```
dwstat
```

با اجرای فرمان فوق، مقدار آماره DW به صورت زیر نشان داده می‌شود:

```
. dwstat
Durbin-Watson d-statistic(  2,    21) =  1.177749
```

که DW= ۱/۱۷۸ است. ارقام داخل پرانتز بیانگر ۲ پارامتر و ۲۱ مشاهده است.

## آزمون نرمال بودن در Stata

آزمون جارک- برا یکی از آزمون‌های نرمال بودن است. مراحل این آزمون عبارت است از:

۱- معادله مورد نظر را تخمین می‌زنیم: `reg y x`

۲- باقیمانده‌ها را حساب می‌کنیم: `predict e, residuals`

۳- شاخص‌های مربوط به e را حساب می‌کنیم: `summarize e, detail`

به جای summarize می‌توان به‌اختصار از sum استفاده کرد.

٤- شاخص‌های مورد نظر را با فرمان return list مشاهده می‌کنیم.

٥- آماره جارک- برا را با فرمان زیر حساب می‌کنیم:

scalar jb=r(N)/6*[r(skewness)^2+0.25*(r(kurtosis)-3)^2]

توجه شود که r(N) حجم مشاهدات است و N بایستی با حروف بزرگ نوشته شود.

```
. scalar jb=r(N)/6*[r(skewness)^2+0.25*(r(kurtosis)-3)^2]
```

٦- مقدار عددی آماره جارک- برا را با فرمان زیر مشاهده می‌کنیم:

di "jarque-bera statistic="jb

```
. di "jarque-bera statistic="jb
jarque-bera statistic=2.6482548
```

۷- اگر jb >٥/٩٩ باشد، نرمال بودن رد می‌شود. در اینجا چون jb=٢/٦٤٨<٥/٩٩ است لذا فرضیه نرمال بودن رد نمی‌شود.

فصل پنجم

# متغیرهای مجازی

## ۵-۱ مقدمه

تاکنون متغیرهای توضیحی را قابل اندازه‌گیری و پیوسته در نظر گرفتیم. اما همواره چنین نیست و موارد بسیاری وجود دارد که برای توضیح یک پدیده نیاز به بررسی عوامل کیفی داریم. معروف‌ترین مثال در این خصوص، بررسی عوامل تعیین‌کننده دستمزد است. بسیاری از این عوامل، کیفی هستند مانند تحصیلات و آموزش، جنسیت، مهارت، نوع صنعت، نژاد و ... . علاوه‌براین، موارد دیگری نیز در خصوص تغییرات کیفی وجود دارد که نقش مهمی در تحلیل رگرسیون دارند، مانند: وضع یک مالیات جدید، تغییر تعرفه‌های وارداتی و صادراتی، وضع یک قانون جدید، وقوع یک حادثه، رسیدن یک خبر خوب یا بد به بازار سهام، تغییرات فصلی، تغییرات سیاسی و غیره. اینها و موارد مشابه، موجب توجه به متغیرهای مجازی به‌عنوان شیوهٔ مناسبی برای لحاظ کردن اثر متغیرهای کیفی و تغییرات کیفی شده است. در ادامه به بررسی ماهیت متغیر مجازی و کاربردهای آن می‌پردازیم.

## ۵-۲ متغیر مجازی[1]

متغیر مجازی یک وضعیت کیفی یا یک تغییر کیفی را توصیف می‌کند که قابل اندازه‌گیری به‌صورت کمّی نیست. در ساده‌ترین حالت، می‌توان یک تغییر کیفی را به دو حالت تقسیم نمود:

---

[1] dummy variable

۱- تغییر کیفی رخ داده است،

۲- تغییر کیفی رخ نداده است.

و یا یک متغیر کیفی می‌تواند دو حالت داشته باشد:

۱- حالت موردنظر،

۲- سایر حالت‌ها.

در چنین مواردی، یک متغیر مجازی برای توصیف این دو حالت تعریف می‌شود. برهمین اساس متغیر مجازی طوری تعریف می‌شود که فقط دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می‌کند: ۱ برای حالت موردنظر و ۰ برای سایر حالت‌ها.

**مثال ۱-۵:** فرض کنید عوامل تعیین کنندهٔ دستمزد را بررسی می‌کنیم، به نظر می‌رسد که جنسیت یکی از این عوامل است. لذا نمونه موردنظر را به دو گروه زن و مرد تقسیم می‌کنیم. متغیر مجازی $D$ را برای بررسی اثر جنسیت بر دستمزد تعریف می‌کنیم به گونه‌ای که $D=0$ برای زنان و $D=1$ برای مردان. لذا دستمزد را تابعی از متغیر مجازی $D$ در نظر می‌گیریم.

**مثال ۲-۵:** تصور کنید که در پانزدهم آذر ماه خبری در خصوص شرکت $A$ رسیده است که به نظر می‌رسد بازدهی آن را تحت تأثیر قرار داده است. برای بررسی تأثیر این خبر، بازدهی‌های روزانه شرکت $A$ در ۱۰ روز قبل از خبر و ۱۰ روز بعد از خبر را گردآوری کرده‌ایم. سپس یک متغیر مجازی برای آن تعریف می‌کنیم که $D=0$ برای روزهای قبل از خبر و $D=1$ برای روزهای بعد از خبر می‌باشد.

## ۵-۳ رگرسیون روی متغیر مجازی

فرض کنید $Y_i$ متغیر وابسته است که تحت تأثیر یک عامل کیفی قرار دارد. برای بررسی تأثیر این عامل، متغیر مجازی $D_i$ را تعریف می‌کنیم. هرگاه این عامل، وجود داشته باشد $D_i=1$ و در غیر این صورت $D_i=0$ می‌باشد. رگرسیون $Y_i$ روی $D_i$ عبارت است از:

$$Y_i=\alpha+\beta D_i+u_i \qquad i=1,\cdots,n \tag{۵-۱}$$

$$D_i=\begin{cases}1 & \text{عامل مورد نظر وجود دارد}\\ 0 & \text{عامل مورد نظر وجود ندارد}\end{cases}$$

معادله (۱-۵) را با روش OLS برآورد می‌کنیم که بدین منظور لازم است مجموع مجذور خطاها حداقل شود. از این معادله می‌توان برای تحلیل تأثیر عامل موردنظر استفاده نمود. از آنجا که $D_i$ برابر ۰ و ۱ است، لذا فقط دو مقدار برای $Y_i$ به دست می‌آید.

$$D_i = 0 \Rightarrow Y_i = \alpha \quad \text{عدم وجود عامل موردنظر} \qquad (۵-۲)$$

$$D_i = 1 \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta \quad \text{وجود عامل موردنظر}$$

بنابراین تأثیر عامل موردنظر برابر با $\beta$ است.

$$\frac{\Delta Y_i}{\Delta D_i} = \beta \Rightarrow \Delta Y_i = \beta \;\; ; \;\; \Delta D_i = 1 - 0 = 1 \qquad (۵-۳)$$

اگر تأثیر عامل موردنظر را بر حسب درصد بیان کنیم، آنگاه درصد افزایش $Y$ عبارت است از:

$$\text{درصد افزایش در } Y = \frac{\Delta Y_i}{Y_i} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (۵-۴)$$

بنابراین، $\frac{\beta}{\alpha}$ بیانگر درصد افزایش در $Y$ است که ناشی از وجود یا وقوع عامل موردنظر می‌باشد.

**مثال ۳-۵:** تصور کنید می‌خواهیم اثر جنسیت بر دستمزد را بررسی کنیم. بدین منظور متغیر مجازی $D_i$ را تعریف می‌کنیم که $D=0$ برای زنان و $D=1$ برای مردان می‌باشد.

$$Y_i = \alpha + \beta D_i + u_i$$

نتایج این مدل عبارت است از:

$$D_i = 0 \Rightarrow Y_i = \alpha \quad \text{متوسط دستمزد زنان}$$

$$D_i = 1 \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta \quad \text{متوسط دستمزد مردان}$$

اگر $\beta > 0$ و معنادار باشد، آنگاه می‌توان گفت که دستمزد مردان به‌طور متوسط بیشتر از دستمزد زنان است. بنابراین، افزایش دستمزد به خاطر جنسیت برابر با $\frac{\Delta Y_i}{\Delta D_i} = \Delta Y_i = \beta$ و درصد افزایش دستمزد که ناشی از جنسیت است برابر با $\frac{\Delta Y_i}{Y_i} = \frac{\beta}{\alpha}$ می‌باشد.

## ۵-٤ دام متغیرهای مجازی[1]

در استفاده از متغیرهای مجازی بایستی دقت شود که اگر جامعه را به دو گروه تقسیم می‌کنیم، فقط برای یک گروه می‌توان متغیر مجازی تعریف نمود. بدین منظور تصور کنید که برای گروه اول $D_{1i}$ و برای گروه دوم $D_{2i}$ را معرفی کنیم. از طرف دیگر می‌دانیم که عرض از مبدأ ( $\alpha$ ) ضریب متغیری مانند $X_i$ است که تمامی مقادیر آن برابر ۱ می‌باشد.

$$Y_i = \alpha X_i + \beta D_{1i} + \gamma D_{2i} + u_i \quad , \quad X_i = 1 \qquad (۵-۵)$$

متغیرهای مجازی نیز به‌صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$D_{i2} = \begin{cases} 0 & \text{برای گروه ۱} \\ 1 & \text{برای گروه ۲} \end{cases}$$

$$D_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{برای گروه ۱} \\ 0 & \text{برای گروه ۲} \end{cases}$$

از آنجا که $D_{i1} + D_{i2} = 1$ است لذا برابر با $X_i$ خواهد بود که موجب همخطی کامل می‌شود و امکان برآورد ضرایب وجود نخواهد داشت. همچنین این موضوع را می‌توان به‌صورت دیگری بررسی نمود. چون $D_{i2} = 1 - D_{i1}$ است، با جایگذاری در معادله رگرسیون خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Y_i &= \alpha X_i + \beta D_{1i} + \gamma(1 - D_{i1}) + u_i \qquad (۵-۶) \\ &= \alpha X_i + (\beta - \gamma) D_{i1} + \gamma + u_i \end{aligned}$$

$\gamma$ نیز ضریب متغیری مانند $Z_i$ است که مقادیر آن برابر ۱ است:

$$Y_i = \alpha X_i + (\beta - \gamma) D_{1i} + \gamma Z_i + u_i \qquad (۵-۷)$$

چون $X_i = Z_i = 1$ است، لذا بین $X_i$ و $Z_i$ همخطی کامل برقرار است و در نتیجه، امکان برآورد این معادله وجود ندارد. نتیجه مهم این بحث آن است که وقتی جامعه به دو گروه تقسیم می‌شود، بایستی فقط یک متغیر مجازی تعریف گردد. در حالت کلی، اگر جامعه به $m$ گروه تقسیم شود، بایستی $m-1$ متغیر مجازی معرفی گردد تا مشکل هم‌خطی به وجود نیاید. این موضوع معروف به دام متغیر مجازی است. البته توجه شود که در رگرسیون فاقد عرض از مبدأ، می توان $m$ متغیر مجازی تعریف نمود.

---

[1] dummy variable trap

### ۵-٤ رگرسیون روی متغیر مجازی همراه با متغیر توضیحی

فرض کنید که $Y_i$ علاوه بر $X_i$ تابعی از یک عامل کیفی است که آن را با متغیر مجازی $D_i$ نشان می‌دهیم:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + u_i \qquad (۵-۸)$$

$$D_i = \begin{cases} ۱ & \text{عامل موردنظر وجود دارد} \\ ۰ & \text{عامل موردنظر وجود ندارد} \end{cases}$$

نتایج حاصل از معادله فوق به‌صورت زیر تحلیل می‌شود:

$$D_i = ۰ \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta X_i \qquad \text{عامل مورد نظر وجود ندارد}$$

$$D_i = ۱ \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma = (\alpha + \gamma) + \beta X_i \qquad \text{عامل موردنظر وجود دارد}$$

ملاحظه می‌شود که عامل موردنظر می‌تواند موجب انتقال خط رگرسیون شود. به‌عبارت دیگر عرض از مبدأ معادله را تغییر می‌دهد. با فرض اینکه $\gamma > ۰$ باشد، نمودار زیر را خواهیم داشت:

نمودار ۱-۵: تغییر در عرض از مبدأ

### ۵-۵ متغیر مجازی و تغییر شیب

عوامل کیفی که اثرشان با متغیرهای مجازی در نظر گرفته می‌شود، علاوه بر عرض از مبدأ، می‌توانند شیب معادله را نیز تغییر دهد. در این صورت اگر فقط شیب و نه عرض از مبدأ را تغییر دهد، می‌توان آن را به‌صورت زیر توصیف نمود:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \theta D_i X_i + u_i \qquad (۵-۹)$$

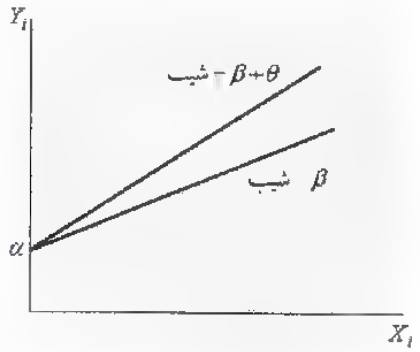
$$D_i = \begin{cases} ۱ & \text{عامل موردنظر وجود دارد} \\ ۰ & \text{عامل موردنظر وجود ندارد} \end{cases}$$

اثر عامل موردنظر بر شیب را می‌توان به‌صورت زیر بررسی نمود:

$$D_i = ۰ \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \qquad (۵-۱۰)$$

$$D_i = ۱ \Rightarrow Y_i = \alpha + (\beta + \theta) X_i + u_i$$

بنابراین وقتی عامل یا حادثه موردنظر رخ داده است، شیب معادله رگرسیون را تغییر می‌دهد که برابر با $\beta + \theta$ می‌شود با فرض $\theta > ۰$ نمودار زیر را داریم:




نمودار ۲-۵: تغییر شیب

اگر هم شیب و هم عرض از مبدأ تغییر کند می‌توان معادله زیر را در نظر گرفت:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + \theta D_i X_i + u_i \qquad (۵-۱۱)$$

$$D_i = \begin{cases} ۱ & \text{برای حالت مورد نظر} \\ ۰ & \text{برای سایر حالت‌ها} \end{cases}$$

تحلیل نتایج معادله فوق به‌صورت زیر است:

$D_i = ۰ \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ عامل یا حادثه موردنظر رخ نداده است

$D_i = ۱ \Rightarrow Y_i = (\alpha + \gamma) + (\beta + \theta) X_i + u_i$ عامل یا حادثه موردنظر رخ داده است

### ۶-۵ وجود دو عامل کیفی

فرض کنید که $Y_i$ دستمزد را نشان می‌دهد که متأثر از دو عامل سواد و سابقه کارگران است. برای هر عامل، یک متغیر مجازی تعریف را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$Y_i = \alpha + \beta D_{1i} + \gamma D_{2i} + u_i \qquad (۵-۱۲)$$

$$D_{1i} = \begin{cases} ۱ & \text{با سابقه} \\ ۰ & \text{کم سابقه} \end{cases}$$

$$D_{2i} = \begin{cases} ۱ & \text{با تحصیلات بالا} \\ ۰ & \text{با تحصیلات پایین} \end{cases}$$

چهار حالت وجود دارد که عبارتند از:

$D_{1i} = D_{2i} = ۰ \Rightarrow Y_i = \alpha$ دستمزد کارگر کم‌سابقه و با تحصیلات پایین

$D_{1i} = ۱ , D_{2i} = ۰ \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta$ دستمزد کارگر باسابقه و با تحصیلات پایین

$D_{1i} = ۰ , D_{2i} = ۱ \Rightarrow Y_i = \alpha + \gamma$ دستمزد کارگر کم‌سابقه و با تحصیلات بالا

$D_{1i} = D_{2i} = ۱ \Rightarrow Y_i = \alpha + \gamma + \beta$ دستمزد کارگران باسابقه و با تحصیلات بالا

با تخمین این معادله، اگر $\beta$ و $\gamma$ از نظر آماری معنادار باشند، نشان می‌دهد که سابقه و تحصیلات بر دستمزد تأثیر مثبت دارند. $\alpha$ دستمزد پایه را در حالتی نشان می دهد که $D_1 = D_2 = ۰$ باشد، یعنی دستمزد فردی کم‌سابقه و با تحصیلات پایین است. $\beta$ تأثیر سابقه را نشان می‌دهد که به دو صورت قابل تحلیل است.

۱- تأثیر سابقه برای «فرد با تحصیلات پایین» عبارت است از:

$$\begin{cases} D_{1i} = ۰ \Rightarrow Y_i = \alpha \\ D_{1i} = ۱ \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Delta D_{1i} = ۱ \Rightarrow \Delta Y_i = \beta \Rightarrow \frac{\Delta Y_i}{Y_i} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (۵-۱۳)$$

۲- تأثیر سابقه برای «فرد با تحصیلات بالا» عبارت است از:

$$\begin{cases} D_{1i} = ۰ \Rightarrow Y_i = \alpha + \gamma \\ D_{1i} = ۱ \Rightarrow Y_i = \alpha + \gamma + \beta \end{cases}$$

$$\Delta D_{1i} = ۱ \Rightarrow \Delta Y_i = \beta \Rightarrow \frac{\Delta Y_i}{Y_i} = \frac{\beta}{\alpha + \gamma} \qquad (۵-۱۴)$$

### ۵-۷ تأثیر متقابل دو عامل کیفی

نکته دیگری که می‌توان به بحث قبلی اضافه نمود آن است که اگر دو عامل کیفی به‌طور همزمان وجود داشته باشند، اثر متقابل آنها را بایستی به‌گونه دیگری تحلیل نمود. به‌عنوان مثال سابقه و تحصیلات ممکن است اثر مضاعفی بر افزایش دستمزد داشته باشند. بدین منظور، مدل زیر را برای لحاظ کردن اثرات متقابل ارائه می‌شود:

$$Y_i = \alpha + \beta D_{1i} + \gamma D_{2i} + \theta D_{1i} D_{2i} + u_i \qquad (۵-۱۵)$$

حاصل‌ضرب $D_{1i}D_{2i}$ بیانگر اثر متقابل دو عامل کیفی است: سابقه و تحصیلات. در اینجا چهار حالت وجود دارد:

۱) $D_{1i} = D_{2i} = 0 \Rightarrow Y_i = \alpha$ متوسط دستمزد کارگر کم‌سابقه و با تحصیلات پایین

۲) $D_{1i} = 1, D_{2i} = 0 \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta$ متوسط دستمزد کارگر باسابقه و با تحصیلات پایین

۳) $D_{1i} = 0 \Rightarrow D_{2i} = 1 \Rightarrow Y_i = \alpha + \gamma$ متوسط دستمزد کارگر کم‌سابقه و با تحصیلات بالا

۴) $D_{1i} = D_{2i} = 1 \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta + \gamma + \theta$ متوسط دستمزد کارگر باسابقه و با تحصیلات بالا

$\theta$ اثر متقابل سابقه و تحصیلات بر دستمزد را نشان می‌دهد. در حالی که $\beta$ اثر سابقه و $\gamma$ اثر تحصیلات را به‌طور جداگانه نشان می‌دهند.

### ۵-۸ متغیرهای مجازی و تغییر ساختار

فرض کنید که داده‌های گردآوری شده مربوط به دوره ۱۳۸۰-۱۳۴۰ باشد. در طول این دوره وقایع زیادی رخ داده است، مانند وقوع انقلاب اسلامی در سال ۱۳۵۷. ممکن است تصور بر این باشد که وقوع چنین وقایعی می‌تواند رگرسیون را دچار تغییر کند. به‌عنوان مثال آن را منتقل کند و یا شیب آن را تغییر دهد. با استفاده از متغیرهای مجازی می‌توان اثر این وقایع را در نظر گرفت. بدین منظور فرض کنید که معادله رگرسیون به‌صورت $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ است و می‌خواهیم اثر واقعه موردنظر را (مثلاً در سال ۱۳۵۷) به این معادله اضافه کنیم.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + \theta D_t X_t + u_t \qquad (۵-۱۶)$$

$$D_t = \begin{cases} 0 & t < ۱۳۵۷ \\ 1 & t \geq ۱۳۵۷ \end{cases}$$

بنابراین، دو معادله رگرسیون داریم، یکی برای قبل از سال ۱۳۵۷ و دیگری برای بعد از آن:

$$D_t = ۰ \Rightarrow Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad , \quad t < ۱۳۵۷ \qquad (۵-۱۷)$$

$$D_t = ۱ \Rightarrow Y_t = (\alpha + \gamma) + (\beta + \theta) X_t + u_t \quad , \quad t \geq ۱۳۵۷$$

حالت دیگر آن است که اثر واقعه موردنظر را فقط در زمان وقوع آن، لحاظ کنیم. در این صورت معادله زیر را تعریف می‌کنیم:

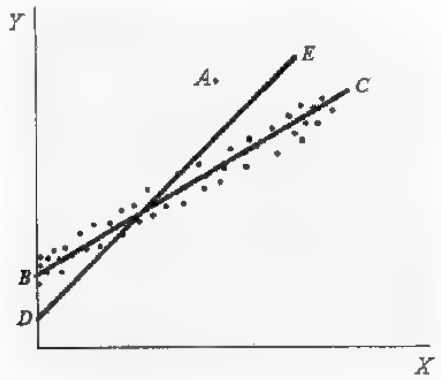
$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + u_t$$

$$D_t = \begin{cases} ۱ & D_t = ۱۳۵۷ \\ ۰ & D_t \neq ۱۳۵۷ \end{cases} \qquad (۵-۱۸)$$

بدین ترتیب اثر وقوع انقلاب در سال ۱۳۵۷ توسط $\gamma$ نشان داده می‌شود ولی در سالهای قبل و بعد از ۱۳۵۷ توسط معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ نشان داده می‌شود. $\gamma$ اثر واقعه موردنظر است که به‌صورت تغییر در یک سال معین می‌باشد.

### ۹-۵ متغیرهای مجازی و مشاهدات دور افتاده[1]

مشاهدات دور افتاده به دلایل مختلفی وجود دارند. یک مشاهده دور افتاده به هر دلیلی که باشد، خارج از محدودهٔ عادی مشاهدات قرار دارد.




نمودار ۳-۵: مشاهدهٔ دور افتاده

[1]outlier

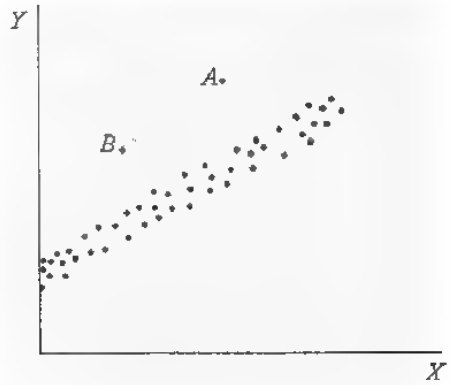
نقطه $A$ یک مشاهدهٔ دورافتاده را نشان می‌دهد که فاصلهٔ غیرعادی با بقیه مشاهدات دارد. این مشاهده ممکن است بیانگر وقوع یک حادثه بوده که نمی‌توان آن را نادیده گرفت. وجود این مشاهده، خط رگرسیون را از $BC$ به $DE$ تغییر می‌دهد. این موجب افزایش خطا و کاهش $R^2$ می‌شود. از طرف دیگر ممکن است در نظر گرفتن اثر حادثه‌ای که فقط در نقطه $A$ مشاهده می‌شود، برای ما مهم باشد. در این صورت می‌توان برای نقطه $A$ یک متغیر مجازی تعریف شود:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + u_i \qquad (۵-۱۹)$$

$$D_i = \begin{cases} ۱ & \text{برای نقطه A} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بنابراین، $\gamma$ نشان‌دهنده اثر واقعه‌ای است که نقطه $A$ را به‌وجود آورده است.

حال اگر مشاهدات دور افتاده به‌صورت نمودار زیر باشد، می‌توان اثر آن را با معرفی یک متغیر مجازی در نظر گرفت.



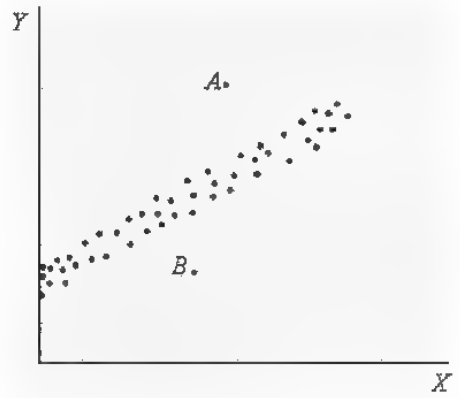

نمودار ٤-۵: مشاهدات دور افتادهٔ همسو

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + u_i \qquad (۵-۲۰)$$

$$D_i = \begin{cases} ۱ & \text{برای نقطه A و B} \\ ۰ & \text{برای سایر نقاط} \end{cases}$$

در اینجا چون دو نقطه $A$ و $B$ در یک راستا قرار دارند (هر دو بالای مشاهدات اصلی، قرار دارند) معرفی یک متغیر مجازی کفایت می‌کند و اثر هر دو نقطه را در نظر می‌گیرد.

اما اگر مشاهدات دور افتاده به‌صورت زیر باشند، وضعیت متفاوتی خواهد داشت.




نمودار ۵-۵: مشاهدات دور افتادهٔ ناهمسو

در این حالت اگر یک متغیر مجازی برای نقاط $A$ و $B$ معرفی کنیم. ضریب آن ($\gamma$) بی‌معنی خواهد شد و نمی‌تواند اثر آنها را در نظر بگیرید. زیرا نقطه $A$ اثر مثبت و نقطه $B$ اثر منفی داشته است. به عبارت دیگر، نقطه $A$ رگرسیون را به بالا و نقطه $B$ رگرسیون را به پایین انتقال می‌دهد. بدیهی است که این دو، همدیگر را خنثی می‌کنند و ضریب متغیر مجازی را بی‌معنی خواهد کرد. بنابراین لازم است برای هر یک از این دو نقطه، متغیرهای مجازی جداگانه‌ای را تعریف کنیم. به عبارت دیگر برای تغییرات مثبت (شوک‌های مثبت) یک متغیر مجازی و برای تغییرات منفی (شوک‌های منفی) نیز یک متغیر مجازی تعریف نماییم.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_{1i} + \theta D_{2i} + u_i \qquad (۵-۲۱)$$

$$D_{1i} = \begin{cases} ۱ & \text{نقطه A} \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$D_{2i} = \begin{cases} ۱ & \text{نقطه B} \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

بدین ترتیب اثر مشاهدهٔ نقطه $A$ که ناشی از یک عامل معین بوده توسط $\gamma$ و اثر مشاهدهٔ نقطه $B$ نیز که ناشی از عامل معین دیگری است توسط $\theta$ نشان داده می‌شود. به‌عنوان مثال نقاطی مانند $A$ می‌تواند رسیدن خبرهای خوب به بازار سهام و نقاطی مانند $B$ می‌تواند رسیدن خبرهای بد را نشان دهند. این بحث را می‌توان در موارد زیادی به‌کار برد. به‌عنوان مثال تأثیر شوک‌های مثبت و

منفی که به یک بازار وارد می‌شود یا تأثیر شوک‌های افزایش و کاهش قیمت نفت بر رشد اقتصادی.

### ۵-۱۰ متغیرهای مجازی و تغییرات فصلی

تغییرات فصلی نیز یکی از عوامل کیفی است که اثر آن به‌ویژه بر تقاضای کالاهای مختلف یا بر تولید کالاها می‌تواند درخور توجه باشد. فرض کنید که معادله رگرسیون به‌صورت $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ است. اثر تغییرات فصلی را با استفاده از متغیرهای مجازی می‌توان وارد این معادله کرد:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \gamma_2 D_{2i} + \gamma_3 D_{3i} + \gamma_4 D_{4i} + u_i \qquad (۵-۲۲)$$

$$D_2 = \begin{cases} 1 & \text{فصل تابستان} \\ 0 & \text{سایر فصل‌ها} \end{cases}$$

$$D_3 = \begin{cases} 1 & \text{فصل پاییز} \\ 0 & \text{سایر فصل‌ها} \end{cases}$$

$$D_4 = \begin{cases} 1 & \text{فصل زمستان} \\ 0 & \text{سایر فصل‌ها} \end{cases}$$

توجه شود که در اینجا چهار فصل داریم ولی سه متغیر مجازی تعریف کرده‌ایم. در واقع فصل بهار را به‌عنوان مبنا در نظر گرفته و برای آن متغیر مجازی معرفی نکرده‌ایم. اگر برای فصل بهار نیز متغیر مجازی $D_1$ را تعریف می‌کردیم، آنگاه حاصل جمع چهار متغیر مجازی در هر شرایطی برابر ۱ می‌شد که با ضریب ثابت $\alpha$ هم‌خطی کامل پیدا می‌کرد و دچار دام متغیر مجازی می‌شدیم.

براساس معادله (۵-۲۲) برای هر یک از فصل‌ها، معادله رگرسیون عبارت است از:

۱) فصل بهار $D_1 = D_2 = D_3 = 0 \Rightarrow Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$

۲) فصل تابستان $D_2 = 1, D_3 = D_4 = 0 \Rightarrow Y_i = (\alpha + \gamma_2) + \beta X_i + u_i$

۳) فصل پاییز $D_2 = 0, D_3 = 1, D_4 = 0 \Rightarrow Y_i = (\alpha + \gamma_3) + \beta X_i + u_i$

۴) فصل زمستان $D_2 = D_3 = 0, D_4 = 1 \Rightarrow Y_i = (\alpha + \gamma_4) + \beta X_i + u_i$

نتایج فوق نشان می‌دهد که تفاوت فصل‌ها توسط عرض از مبدأها مشخص شده است که موجب انتقال منحنی به سمت بالا یا پایین می‌شود.

### ۵-۱۱ توابع لگاریتمی و متغیر مجازی

توابعی که تاکنون معرفی کردیم، خطی بودند. اگر متغیر وابسته به‌صورت لگاریتمی باشد، آنگاه تحلیل نتایج نیز متفاوت خواهد بود. بدین منظور معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\ln Y_i = \alpha + \beta D_i + u_i \qquad (۵-۲۳)$$

اگر $D_i = ۰$ باشد، $\ln Y_i = \alpha$ و اگر $D_i = ۱$ باشد $\ln Y_i = \alpha + \beta$ است. بنابراین تغییر در لگاریتم $Y_i$ برابر با $\beta$ است:

$$\frac{\Delta \ln Y_i}{\Delta D_i} = \Delta \ln Y_i = \beta \qquad (۵-۲۴)$$

از طرف دیگر، تغییر $Y_i$ برابر است با:

$$D_i = ۰ \rightarrow \ln Y_i = \alpha \Rightarrow Y_i = e^{\alpha}$$

$$D_i = ۱ \rightarrow \ln Y_i = \alpha + \beta \Rightarrow Y_i = e^{\alpha+\beta} = e^{\alpha} e^{\beta}$$

$$\Delta Y_i = e^{\alpha} e^{\beta} - e^{\alpha} = e^{\alpha}(e^{\beta} - ۱)$$

و درصد تغییر در $Y$ برابر است با:

$$\frac{\Delta Y_i}{Y_i} = \frac{e^{\alpha}(e^{\beta} - ۱)}{e^{\alpha}} = e^{\beta} - ۱ \qquad (۵-۲۵)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که در حالت پیوسته، $d \ln Y_i = \frac{dY_i}{Y_i}$ است و لذا با مشتق‌گیری از (۵-۲۳) خواهیم داشت:

$$d \ln Y_i = \beta \Rightarrow \frac{dY_i}{Y_i} = \beta \qquad (۵-۲۶)$$

تفاوت (۵-۲۵) و (۵-۲۶) در این است که در محاسبه (۵-۲۶) فرض کرده‌ایم متغیرها پیوسته و قابل مشتق‌گیری هستند. لذا فرمول (۵-۲۶) به‌صورت تقریبی است و نه دقیق. به‌هرحال

این دو، تقریباً برابرند و با استفاده از بسط تیلور می‌توان نشان داد که $e^{\beta}-1 \cong \beta$ است.[1]

### ۵-۱۲ قیمت‌گذاری عوامل کیفی

در برخی از کاربردهای اقتصادی و مالی می‌توان از متغیرهای مجازی به‌عنوان روشی برای قیمت‌گذاری عوامل کیفی استفاده نمود. به‌عنوان مثال در معادله تعیین دستمزد، اثر دستمزد را تابعی از سابقه بدانیم، رابطه زیر را برای آن می‌نویسیم:

$$Y_i = \alpha + \beta D_i + u_i \qquad (۵-۲۷)$$

$$D_i = \begin{cases} 1 & \text{با سابقه} \\ 0 & \text{بدون سابقه} \end{cases}$$

اگر $D_i = 0$ باشد آنگاه دستمزد برابر با $Y_i = \alpha$ است. حال اگر $D_i = 1$ باشد آنگاه دستمزد برابر با $Y_i = \alpha + \beta$ می‌باشد. بنابراین افزایش دستمزد بابت سابقه برابر با $\beta$ است. $\beta$ را می‌توان قیمت سابقه دانست. زیرا مقدار دستمزدی است که به‌خاطر داشتن سابقه پرداخت می‌شود. به‌عنوان مثال دیگر، در مدل‌های تقاضا، قیمت تابعی از عوامل و متغیرهای مختلفی است که بعضی از آنها کیفی هستند. در این مدل‌ها، قیمت معادل با تمایل به پرداخت مصرف‌کننده بابت این عوامل است. به‌عنوان مثال مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$P_i = \alpha + \beta X_i + \gamma D_i + u_i \qquad (۵-۲۸)$$

معادله فوق یک معادله تقاضا است که بر حسب قیمت، تنظیم شده است. قیمتی که متقاضی می‌پردازد یا به‌طور کلی، قیمت بازار تابعی از خصوصیات کالا و عوامل تعیین‌کننده آن است. در اینجا فقط دو عامل را ذکر کرده‌ایم که یکی متغیر کمّی $X_i$ و دیگری متغیر یا عامل کیفی است که $D_i$ آن را نشان می‌دهد. اگر $D_i$ از ۰ به ۱ افزایش یابد، قیمت در هر سطحی از $X_i$ افزایش می‌یابد که مقدار افزایش آن برابر با $\gamma$ است. لذا $\gamma$ معادل با قیمت یا ارزش عامل موردنظر از

---

[1] بسط تیلور یا تقریب مرتبه اول برای تابع $f(x)$ حول $x = 0$ برابر با $f(x) \cong f(0) + f'(0)x$ می‌باشد. مشابه این رابطه برای تابع $f(\beta) = e^{\beta} - 1$ حول $\beta = 0$ برابر است با:

$$f(\beta) \cong f(0) + f'(0)\beta = (e^{0} - 1) + e^{0}\beta = \beta$$

دیدگاه مصرف‌کننده است. این نوع از معادلات در رابطه با تقاضای مسکن کاربرد زیادی دارد. طبق این معادله، قیمت مسکن تابعی از عوامل کیفی مانند، دسترسی به بازار، داشتن سیستم گرمایش و سرمایش، موقعیت مکانی، شلوغی و غیره. هر یک از این عوامل نقشی در تعیین قیمت مسکن دارند که ضریب هر یک از آنها، معادل با ارزش (مثبت یا منفی) عامل موردنظر است.

**متغیرهای مجازی در Eviews** فایل data8

فرض کنید مدل زیر را می‌خواهیم برآورد کنیم:

$$Y_i = \alpha_1 + \beta_1 X_i + \alpha_2 D_{1i} + \beta_2 D_{1i} X_i + u_i$$

$$D_{1i} = \begin{cases} 1 & X < 100 \\ 0 & X \geq 100 \end{cases}$$

برای تخمین این مدل می‌توان متغیر مجازی $D_{1i}$ را با دستور data D1 تعریف نمود. اما راه ساده‌تر آن است که به‌صورت زیر عمل کنیم.

برای برآورد این معادله، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا متغیر D2 را با دستور genr D2=1 ایجاد می‌کنیم.

۲- معادله مورد نظر را به صورت زیر برآورد می‌کنیم:

LS Y C X D2*X<100 (D2*X<100)*X

در واقع ضریب D2*X<100 معادل با ضریب $D_{1i}$ (یعنی $\alpha_2$) و ضریب (D2*X<100)*X معادل با ضریب $D_{1i}X_i$ (یعنی $\beta_2$) است.

Equation: UNTITLED Workfile: DATA20::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 12/26/13 Time: 11:05
Sample: 1351 1360
Included observations: 10

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -13.24402 | 2.000893 | -6.619054 | 0.0006 |
| X | 0.194258 | 0.014948 | 12.99525 | 0.0000 |
| D2*X<100 | 16.57112 | 2.236107 | 7.410701 | 0.0003 |
| (D2*X<100)*X | -0.167156 | 0.022881 | -7.309803 | 0.0003 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.983085 | Mean dependent var | 9.300000 |
| Adjusted R-squared | 0.974828 | S.D. dependent var | 5.538752 |
| S.E. of regression | 0.882252 | Akaike info criterion | 2.876497 |
| Sum squared resid | 4.870214 | Schwarz criterion | 2.997531 |
| Log likelihood | -10.38248 | Hannan-Quinn criter. | 2.743723 |
| F-statistic | 118.2387 | Durbin-Watson stat | 2.381689 |
| Prob(F-statistic) | 0.000011 | | |

بنابراین معادله تخمینی عبارت است از:

$$\hat{Y}_i = -۱۳/۲۴ + ۰/۱۹ X_i + ۱۶/۵۷ D_{1i} - ۰/۱۷ D_{1i} X_i$$

**مسائل**

۱- به نظر می‌رسد که مقدار فروش یک بنگاه در فصول مختلف دارای تفاوت معناداری است. برای فروش این بنگاه یک معادله رگرسیون با استفاده از متغیرهای مجازی به‌منظور لحاظ کردن اثرات فصلی معرفی کرده و موارد زیر را پاسخ دهید.

الف) آزمون یکسان بودن فروش در فصل‌های مختلف.

ب) آزمون برابری فروش در فصل بهار و پاییز.

ج) آزمون برابری فروش در فصل بهار و پاییز و برابری فروش در تابستان و پاییز.

۲- تقاضای بنزین تابعی از قیمت آن است. لذا دولت می‌خواهد با افزایش قیمت، مصرف بنزین را کاهش دهد. اما استدلال می‌شود که چون قیمت بنزین پایین است، نمی‌توان از سیاست‌های قیمتی برای کنترل مصرف استفاده نمود؛ مگر آنکه قیمت بنزین از یک مقدار آستانه ($P^*$) عبور کند. این وضعیت را روی نمودار نشان داده و یک معادله تقاضای بنزین را برای آن معرفی کنید.

۳- نظریه مصرف دوزنبری بیان می‌کند که رفتار مصرفی در واکنش به تغییرات درآمد، قرینه نمی‌باشد. بدین معنی که به افزایش‌های درآمد، واکنش بیشتری نشان می‌دهد ولی به کاهش‌های درآمد، واکنش کمتری نشان می‌دهد. این رفتار مصرفی را با استفاده ازمتغیرهای مجازی توصیف کنید.

۴- معادله مصرف در مسئله ۳ را چگونه با Eviews برآورد می‌کنید.

۵ مشاهدات مربوط به $Y_t$ در دوره ۸۰-۱۳۵۰ به‌صورت شش ماهه در د سترس است. داده‌های شش‌ماهه اول متفاوت از شش ماهه دوم است. با استفاده از متغیرهای مجازی اثر تفاوت فصلی را بر معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ مدل‌سازی کنید.

۶- در معادله $Y_t = \alpha F_t + \beta M_t + u_t$ درآمد روی جنسیت برازش شده است. $F_t$ برای زنان و $M_t$ برای مردان برابر با ۱ است. ثابت کنید که $\hat{\alpha}$ برابر با میانگین درآمد زنان و $\hat{\beta}$ برابر با میانگین درآمد مردان است.

۷- معادله $Y_t = \alpha + \beta D_t + u_t$ بیانگر رگرسیون درآمد روی جنسیت می‌باشد. $D_t$ متغیر مجازی است که برای مردان برابر با ۱ و برای زنان برابر با ۰ است. متوسط درآمد زنان و مردان چقدر است.

۸- فرض کنید که داده‌های تقاضا کالای $Q$ و قیمت آن $(P)$ و همچنین درآمد مصرف‌کنندگان $(I)$ به‌صورت زیر باشد. توجه شود که مقدار تقاضا به صورت فصلی ولی قیمت و درآمد به‌صورت سالانه در دسترس بوده است.

| سال | فصل | $Q$ | $P$ | $I$ |
|---|---|---|---|---|
| ۱۳۸۰ | | ۱۰۰<br>۱۵۰<br>۱۰۰<br>۱۲۰ | ۵۰ | ۱۰۰۰ |
| ۱۳۸۱ | | ۱۱۰<br>۱۵۰<br>۱۲۰<br>۱۳۰ | ۶۰ | ۱۲۰۰ |
| ۱۳۸۲ | | ۱۱۵<br>۱۵۰<br>۱۱۰<br>۱۲۰ | ۶۵ | ۱۵۰۰ |
| ۱۳۸۳ | | ۱۲۰<br>۱۶۰<br>۱۰۰<br>۱۴۰ | ۸۰ | ۱۸۰۰ |
| ۱۳۸۴ | | ۱۳۰<br>۱۷۰<br>۱۲۰<br>۱۳۰ | ۹۰ | ۲۰۰۰ |

الف) متوسط تقاضا برای هر سال را حساب کرده و معادله تقاضا را بر اساس داده‌های سالانه برآورد کنید.

ب) اثر تفاوت‌های فصلی را در معادله تقاضا آزمون کنید.

۹- معادله $Y_i = \alpha + \beta D_i + u_i$ بیانگر رگرسیون درآمد روی جنسیت است. آزمون برابری درآمد مردان و زنان را چگونه انجام می‌دهید.

۱۰- معادله $Y_i = \alpha F_i + \beta M_i + u_i$ بیانگر رگرسیون درآمد روی جنسیت است ( $F_i$ برای زنان و $M_i$ برای مردان). آزمون برابری درآمد مردان و زنان را چگونه انجام می‌دهید.

۱۱- اگر مؤسسه‌ای به کارکنان خود در ساعات معمول، دستمزد ثابتی به‌ازای هر ساعت بپردازد، ولی بابت اضافه‌کاری آنها به ازای هر ساعت، دستمزد ثابت و بالاتری بپردازد، یک معادله رگرسیون برای توصیف این وضعیت به کمک متغیرهای مجازی معرفی کنید. همچنین اگر به‌ازای هر ساعت اضافه کاری، دستمزد بالاتر و متغیر بپردازد، یک معادله رگرسیون برای توصیف این وضعیت به کمک متغیرهای مجازی معرفی کنید.

## ضمیمه فصل ۵: متغیرهای مجازی در Stata

### متغیرهای مجازی در Stata

استفاده از متغیرهای مجازی مانند متغیرهای معمولی است. اما مسئله مهم این است که متغیر مجازی را برای چه موضوعی می‌سازیم و چه هدفی را دنبال می‌کنیم. بعد از مشخص نمون موضوع و هدف مورد نظر می‌توان متغیر مجازی را تعریف کرده و سپس مقادیر آن را که برابر با صفر و یک می‌باشند وارد نمود.

به عنوان مثال فرض کنید مدل زیر را می‌خواهیم برآورد کنیم:

$$Y_i = \alpha_1 + \beta_1 X_i + \alpha_2 D_{1i} + \beta_2 D_{1i} X_i + u_i$$

$$D_{1i} = \begin{cases} 1 & X < 100 \\ 0 & X \geq 100 \end{cases}$$

ابتدا متغیر مجازی D را با فرمان زیر می‌سازیم:

```
gen d=(x<100)
```

سپس حاصل‌ضرب متغیرهای D و X را با فرمان زیر حساب می‌کنیم:

```
gen  dx=d*x
```

سپس معادله را با فرمان زیر تخمین می‌زنیم:

```
reg  x d dx
```

```
. reg  y x d dx

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      10
-------------+------------------------------           F(  3,     6) =  116.24
       Model |  271.429786     3  90.4765953           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  4.67021419     6  .778369032           R-squared     =  0.9831
-------------+------------------------------           Adj R squared =  0.9746
       Total |       276.1     9  30.6777778           Root MSE      =  .88225

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |   .1942584   .0149484    13.00   0.000     .1576809    .2308358
           d |   16.57112   2.236107     7.41   0.000     11.09956    22.04268
          dx |  -.1671556   .0226811    -7.37   0.000    -.2226543   -.1116568
        cons |  -13.24402   2.000893    -6.62   0.001    -18.14003    8.34801
------------------------------------------------------------------------------
```

متغیرهای مجازی را به اشکال دلخواه می‌توان ایجاد کرد که برخی از آنها عبارتند از:

gen d=(t=1357)

gen d=(t<=1357)

gen d=(t>1357)

gen d=(x>=250)

gen d=(x=120)

فصل ششم

# آزمون‌های خاص: تصریح مدل، تغییر ساختاری و علیّت

## ۶-۱ مقدمه

در تخمین معادلات، مسائل و موضوعات خاصی وجود دارد که متفاوت از مباحث قبلی است. بدین منظور در این فصل به موضوعات خاصی می‌پردازیم که معمولاً در تخمین ضرایب معادلات با آن مواجه می‌شویم. این موضوعات در اغلب موارد، موجب تورش در ضرایب برآوردی و یا بی‌اعتبار شدن آزمون‌های فرضیه می‌شود که لازم است اقداماتی در جهت رفع آنها صورت گیرد. این موضوعات شامل همخطی و مشکلات مربوط به آن، فرم تابعی غلط، حذف متغیرهای مهم، افزودن متغیرهای نامربوط، ثبات ضرایب، خطای اندازه‌گیری و علّیت می‌باشد.

## ۶-۲ همخطی

### ۶-۲-۱ مفهوم همخطی

در تخمین پارامترها با استفاده از روش OLS فرض ضمنی این است که متغیرهای توضیحی با یکدیگر همبستگی خطی ندارد. همبستگی خطی بین متغیرها موسوم به همخطی است که در فصل سوم اشاره مختصری به آن شد. همان‌طور که قبلاً دیدیم تخمین ضرایب معادله رگرسیون به‌صورت $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ می‌باشد. وضعیت همخطی بستگی به ماهیت ماتریس $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ و یا ماتریس $\mathbf{X}$ دارد. در این خصوص، سه حالت وجود دارد:

۱- اگر همخطی کامل وجود داشته باشد بدین معنی است که بین دو یا چند ستون از ماتریس $\mathbf{X'X}$ ترکیب خطی وجود دارد (یعنی بین دو یا چند متغیر توضیحی، رابطه خطی وجود دارد) و لذا دترمینان ماتریس $\mathbf{X'X}$ برابر با صفر شده و نمی‌توان ضرایب معادله رگرسیون را برآورد نمود. این حالت بیانگر آن است که لااقل یکی از متغیرهای توضیحی، ترکیب خطی از سایر متغیرهای توضیحی است. به‌عبارت دیگر در ماتریس $\mathbf{X}$ یکی از ستون‌ها ترکیبی از یک یا چند ستون دیگر است. به‌عنوان مثال اگر $X_{۲i}$ ترکیب خطی از سایر متغیرها باشد، بدان معنا است که $X_{۲i}$ حاوی هیچ اطلاعات مفید و جدیدی نیست، زیرا اطلاعات آن صرفاً از متغیرهای دیگر به‌دست آمده است. به‌عوان مثال برای برآورد $K$ ضریب، بایستی $K$ ستون (متغیر) مستقل در ماتریس $\mathbf{X}$ داشته باشیم. لذا اگر یکی از ستون‌ها (متغیرها) ترکیب خطی از بقیه ستون‌ها باشد، آنگاه یکی از اطلاعات ما، مفید نخواهد بود. باین بدان معنا است که اطلاعات و داده‌ها کمتر از تعداد ضرایب است و لذا امکان برآورد ضرایب وجود نخواهد داشت.

۲- حالت دیگر این است که هیچ‌گونه رابطه خطی بین متغیرها وجود نداشته باشد. در این حالت، کوواریانس یا ضریب همبستگی بین متغیرهای توضیحی صفر می‌شود. همان‌طور که در فصل سوم دیدیم، ماتریس $\mathbf{X'X}$ تبدیل به یک ماتریس قطری شده و تخمین هر یک از ضرایب هیچ ارتباطی با سایر ضرایب ندارد.

۳- حالت عمومی و متداول این است که همبستگی بین متغیرهای توضیحی بین صفر و یک می‌باشد. بدیهی است که در این حالت، مشکل هنگامی به‌وجود می‌آید که همخطی شدید باشد و همبستگی بین متغیرهای توضیحی نسبتاً بزرگ باشد. اگر چه همخطی مشکلاتی را در تخمین پارامترها ایجاد می‌کند، ولی بر خواص تخمین‌زننده‌های OLS تأثیری ندارد.

### ۶-۲-۲ مشکلات ناشی از همخطی

در فصل سوم دیدیم که در یک رگرسیون دو متغیره اگر بین دو متغیر توضیحی همخطی وجود داشته باشد ضریب همبستگی آنها ( $r_{۲۳}$ ) افزایش می‌یابد و این موجب افزایش واریانس تخمین‌زننده‌های OLS می‌شود. افزایش واریانس نیز به نوبه خود باعث می‌شود که فاصله اطمینان پارامترها، عریض‌تر شود. از طرف دیگر چون واریانس تخمین‌زننده‌ها افزایش می‌یابد، لذا موجب بی‌معنی شدن ضرایب می‌شود و $t$ آنها را غالباً کاهش می‌دهد.

در صورت وجود همخطی، علی‌رغم اینکه مقادیر $t$ کوچک است، ولی $R^2$ بزرگ می‌باشد. وجود این وضعیت بدان معنا است که یک رابطه خطی بین متغیرهای توضیحی وجود دارد که توانسته است تغییرات متغیر وابسته را به‌خوبی توضیح دهد. توجه شود که مقدار $t$ برای معنادار بودن یک ضریب به‌کار می‌رود، ولی مقدار $F$ برای معنی‌دار بودن همه ضرایب است. ممکن است این دو ( یعنی $F$ یا $R^2$ بزرگ ولی $t$ کوچک) متناقض به‌نظر آید. ولی توجه داریم که در اینجا مسئلهٔ مهم رابطه خطی بین متغیرهای توضیحی است. بدین منظور ابتدا کوواریانس بین $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\beta}_3$ را در نظر بگیرید که عبارت است از:

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta}_2 , \hat{\beta}_3)=\frac{-r_{23}\sigma^2}{(1-r_{23}^2)\sqrt{\sum x_{i2}^2 \sum x_{i3}^2}} \qquad (۶-۱)$$

از این فرمول واضح است که با افزایش $r_{23}$، کوواریانس تخمین‌زننده‌ها افزایش می‌یابد. بنابراین، در صورت همخطی شدید، کوواریانس تخمین‌زننده‌ها بزرگ می‌شود و لذا حذف یا ورود یک متغیر موجب تغییر در مقدار ضرایب می‌شود. به‌عبارت دیگر تخمین پارامترها به‌شدت به‌همدیگر وابسته هستند و لذا نمی‌توان مقدار دقیق این پارامترها را برآورد نمود.

### ۳-۲-۶ شناسایی همخطی

مشکلی که همخطی ایجاد می‌کند آن است که با افزایش ضریب همبستگی بین دو متغیر، واریانس تخمین‌زننده‌های آن‌ها افزایش یابد و مقدار $t$ را کوچک می‌کند در این حالت استنباط ما این است که ضریب مورد نظر بی‌معنی است و باید از مدل حذف شود. این استنباط نادرست بوده و حذف یک متغیر موجب می‌شود تا برآورد ما از سایر ضرایب نیز دچار تورش شود. بدین ترتیب، همخطی هنگامی ایجاد مشکل می‌کند که یک پارامتر به غلط اعتبار خود را از دست بدهد. آزمون‌های تشخیص همخطی نیز باید قادر باشند تا بی‌معنی بودن ضرایب به‌دلیل همبستگی بین متغیرهای توضیحی را تشخیص دهند. از آنجا که تشخیص اینکه یک پارامتر به دلیل همخطی، بی‌معنی شده است کار دشواری است، لذا نمی‌توان به یک آزمون قطعی برای تشخیص همخطی دست یافت. ولی برخی قواعد و روش‌های توافقی وجود دارند که برای تشخیص همخطی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

یکی از معیارهای ساده جهت شناسایی همخطی استفاده از ضرایب همبستگی بین متغیرهای توضیحی است. اگر ضرایب همبستگی بین متغیرهای توضیحی، نسبتاً بزرگ باشد بیانگر همخطی نسبتاً شدید است. اما اگر ضرایب همبستگی کوچک باشند بدین معنی نیست که همخطی وجود ندارد. به‌عبارت دیگر علیرغم پایین بودن این ضرایب، ممکن است همخطیِ نسبتاً بالایی در مدل وجود داشته باشد. در چنین شرایطی، یک پیشنهاد این است که از ضرایب همبستگی جزئی استفاده شود که در فصل دوم راجع به آنها بحث شد. معمولاً گفته می‌شود که اگر برای یک معادله رگرسیون، ضریب همبستگی ساده بین متغیرهای توضیحی بیش از $\sqrt{R^2}$ باشد، همخطی شدید است.

**محاسبه ضرایب همبستگی ساده در Eviews** **فایل data2**

**نحوهٔ محاسبه «ضرایب همبستگی ساده» با استفاده از نرم‌افزار Eviews در فصل دوم توضیح داده شد. به‌عنوان مثال در برآورد تابع تولید، متغیرهای تولید ناخالص داخلی (Y)، نیروی کار (L) و سرمایه (K) را داریم که ضرایب همبستگی آنها عبارت است از:**

| | Y | K | L |
|---|---|---|---|
| Y | 1 | 0.894944 | 0.917590 |
| K | 0.894944 | 1 | 0.867922 |
| L | 0.917590 | 0.867922 | 1 |

**جدول فوق نشان می‌دهد که ضریب همبستگی بین L و K حدود ۰/۸٦۸ می‌باشد که نسبتاً بالا است و نشان از همخطی است.**

**از طرف دیگر اگر به‌جای تابع تولید، از معادله نرخ رشد استفاده کنیم، در این صورت معمولاً همخطی بین متغیرهای توضیحی کاهش می‌یابد. ضرایب همبستگی بین نرخ رشد متغیرها عبارتند از:**

| | GY | GK | GL |
|---|---|---|---|
| GY | 1 | 0.4301294 | 0.555101 |
| GK | 0.4301294 | 1 | 0.243341 |
| GL | 0.5551013 | 0.2433416 | 1 |

**جدول فوق نشان می‌دهد که ضریب همبستگی بین نرخ رشد کار و سرمایه حدود ۰/۲٤۳ می‌باشد که نشان می‌دهد در چنین حالتی همخطی قابل اغماض است.**

روش دیگر برای شناسایی همخطی این است که هر یک از متغیرهای توضیحی را روی بقیه متغیرهای توضیحی برازش نموده و ضریب تعیین آن را حساب کرده و با ضریب تعیین مدل اصلی مقایسه کنیم. اگر ضریب تعیین معادله مورد نظر از ضریب تعیین مدل اصلی بیشتر شد، در این

صورت همخطی شدید و غیر قابل اغماض است. به‌عنوان مثال فرض کنید که مدل زیر را داشته باشیم:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\cdots+\beta_KX_{Kt}+u_t=\beta_1+\sum_{i=2}^{K}\beta_iX_{it}+u_t \qquad (۶-۲)$$

با تخمین این مدل، $R^2$ نیز به‌دست می‌آید. از طرف دیگر، به‌عنوان مثال برای $X_i$ داریم:

$$X_{it}=\gamma_1+\gamma_2X_{2t}+\gamma_3X_{3t}+\cdots+\gamma_KX_K+\varepsilon_t=\gamma_1+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K}\gamma_jX_{jt}+\varepsilon_t \qquad (۶-۳)$$

ضریب تعیین این معادله را با $R_i^2$ نشان داده و با ضریب تعیین مدل اصلی( $R^2$ ) مقایسه می‌کنیم. اگر $R_i^2 > R^2$ باشد در این صورت همخطی شدید است. اما این روش به سختی می‌تواند در تشخیص همخطی کمک کند، زیرا تصور کنید که $R^2=۰/۹۴$ و $R_i^2=۰/۹۲$ باشد در این صورت رابطه خطی شدیدی بین $X_i$ و سایر $X$ها وجود دارد، هر چند که $R_i^2$ اندکی از $R^2$ کوچکتر است. بنابراین روش مناسب‌تر آن است که معنادار بودن $R_i^2$ را آزمون کنیم. بدین صورت که اگر $R_i^2$ معنی‌دار باشد بیانگر وجود همخطی شدید بین $X_i$ با سایر $X$ها است. برای آزمون معنی‌دار بودن $R_i^2$، از تابع $F$ استفاده می‌کنیم:

$$F_i=\frac{ESS/\left(n-(K-1)\right)}{RSS/\left((K-1)-1\right)}=\frac{n-K+1}{K-2}\,\frac{R_i^2}{1-R_i^2} \qquad (۶\cdot۴)$$

درجه آزادی $F_i$ به ترتیب $K-2$ و $n-K+1$ می‌باشد که $n$ تعداد مشاهدات و $K$ تعداد پارامترهای تخمینی در معادله رگرسیون $X_i$ روی $X$ها می‌باشد. اگر مقدار $F_i$ از $F$ جدول بزرگتر باشد در این صورت $R_i^2$ به اندازه کافی بزرگ است و حاکی از همخطی شدید $X_i$ با سایر $X$ها می‌باشد.

روش فوق هر چند مفید و ساده است اما ممکن است در شناسایی برخی از انواع همخطی نتواند کمک نماید. به‌عنوان مثال فرض کنید که ترکیب خطی از $X_2$ و $X_3$ دارای همخطی شدیدی با ترکیب خطی از سایر متغیرها باشد. در این صورت بایستی ترکیب خطی از $X_2$ و $X_3$ را روی سایر متغیرهای توضیحی برازش کنیم. در چنین شرایطی نمی‌توان از روش فوق استفاده نمود.

روش دیگر در شناسایی همخطی، بررسی دترمینان ماتریس $\mathbf{X'X}$ است. هرچه دترمینان $\mathbf{X'X}$ نزدیک به صفر باشد بیانگر هم‌خطی شدید بین $X_i$ ها است، اما مشکل این روش این است که

دترمینان $\mathbf{X'X}$ چقدر باید به صفر نزدیک باشدتا بتوان گفت که بین $X_i$ ها همخطی شدید وجود دارد.

### ٤-۲-٦ راه‌های کاهش همخطی

مشکل همخطی، مربوط به نمونه است. به‌عنوان مثال تصور کنید که مصرف را تابعی از درآمد و ثروت می‌دانیم. از قبل مشخص است که بین درآمد و ثروت یک رابطه مستقیم وجود دارد. یعنی افراد ثروتمندتر دارای درآمد بالاتر می‌باشند. اما نمی‌توان به این قضاوت اکتفا نمود، بلکه بایستی ببینیم که در نمونه یا بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده آیا همخطی شدیدی بین درآمد و ثروت وجود دارد یا نه. لذا در بررسی همخطی، بایستی راجع به داده‌ها بحث نمود و نه در مورد مدل یا روش تخمین.

بر اساس بحث فوق یکی از راه‌های کاهش همخطی این است که حجم نمونه را افزایش دهیم. با افزایش حجم نمونه ممکن است همخطی کاهش یابد. به‌عنوان مثال در معادله‌ای که شامل دو متغیر $X_2$ و $X_3$ است، اگر با افزایش حجم نمونه ضریب همبستگی $X_2$ و $X_3$ تغییر نکند، در این صورت واریانس تخمین‌زننده‌ها کاهش می‌یابد. زیرا به‌عنوان مثال واریانس $\hat{\beta}_2$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_2)=\frac{\sigma^2}{(1-r_{23}^2)\sum x_{i2}^2} \qquad (۶-۵)$$

با افزایش حجم نمونه، $\sum x_{i2}^2$ افزایش می‌یابد و لذا واریانس $\hat{\beta}_2$ را کاهش می‌دهد. با کاهش واریانس $\hat{\beta}_2$، امکان برآورد دقیق‌تری از این پارامتر فراهم می‌شود.

روش دیگر برای کاهش همخطی، حذف متغیری است که موجب همخطی می‌شود. اما مشکل این روش آن است که مدلی را که از نظر تئوری درست است تبدیل به مدلی می‌کنیم که از تئوری فاصله می‌گیرد. در چنین شرایطی دچار مشکل «تورش تصریح» می‌شویم که موجب تورش ضرایب تخمینی می‌شود. (به فصل ۲ و ۳ مراجعه شود).

راه دیگر برای کاهش همخطی، استفاده از ترکیب داده‌های سری زمانی و مقطعی است. به‌عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تابع تقاضای یک کالا را برآورد کنیم و متغیرهای توضیحی ما شامل قیمت و درآمد می‌باشد. در اینجا می‌توان ضریب مربوط به متغیر درآمد را با استفاده از داده‌های مقطعی (گروه‌های درآمدی) برآورد نمود.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad (۶-۶)$$

$Y_t$ مصرف کالای مورد نظر، $X_2$ و $X_3$ به ترتیب درآمد و قیمت می‌باشند. در این حالت ابتدا معادله $Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t}$ را با داده‌های مقطعی برآورد کرده و سپس $\alpha_2$ را به‌عنوان تخمین $\beta_2$ در نظر می‌گیریم. توجه شود که در اینجا فرض بر این است که $\hat{\alpha}_2 = \hat{\beta}_2$ خواهد بود. سپس بر اساس $\hat{\beta}_2$، معادله رگرسیون را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = \beta_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$$
$$Y_t - \hat{\beta}_2 X_{2t} = \beta_1 + \beta_3 X_{3t} + u_t$$
$$Y_t^* = \beta_1 + \beta_3 X_{3t} + u_t \quad , \quad Y_t^* = Y_t - \hat{\beta}_2 X_{2t} \qquad (۶-۷)$$

حال می‌توان معادله آخر را برآورد نمود و ضرایب $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_3$ را نیز به‌دست آورد. یکی دیگر از روش‌هایی که می‌تواند به کاهش همخطی کمک نماید استفاده از تئوری است. به‌عنوان مثال تابع تولید را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$LnY_t = \alpha + \beta_1 LnL_t + \beta_2 LnK_t + u_t \qquad (۶-۸)$$

فرض کنید از قبل می‌دانیم که $\hat{Y}_t^3$ است. در این صورت تابع تولید را با توجه به $\beta_1 = 1 - \beta_2$ صورت زیر می‌نویسیم:

$$LnY_t = \alpha + (1-\beta_2)LnL_t + \beta_2 LnK_t + u_t$$
$$LnY_t - LnL_t = \alpha + \beta_2 (LnK_t - LnL_t) + u_t$$
$$Ln\left(\frac{Y_t}{L_t}\right) = \alpha + \beta_2 Ln\left(\frac{K_t}{L_t}\right) + u_t \qquad (۶-۹)$$

در چنین شرایطی اگر $L$ و $K$ همخطی شدید داشته باشند، با اعمال قید $\beta_1 + \beta_2 = 1$ تعداد متغیرهای توضیحی را تقلیل می‌دهیم. در واقع این راهی برای اعمال و آزمون قید $\beta_1 + \beta_2 = 1$ است، هر چند که به برطرف کردن همخطی نیز کمک می‌کند.

یکی دیگر از روش‌های کاهش همخطی، تبدیل متغیرها است. به‌عنوان مثال در برآورد تابع تولید، اگر به‌جای مقدار متغیرها از تفاضل آنها یا نرخ رشد آنها استفاده کنیم، معمولاً همخطی کاهش می‌یابد. تابع تولید کاب- داگلاس را درنظر بگیرید که لگاریتم آن به‌صورت زیر است:

$$LnY_t = \alpha + \beta_1 LnL_t + \beta_2 LnK_t + u_t$$

با دیفرانسیل‌گیری از تابع تولید، مدل زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{Y}_t = \beta_1 \dot{L}_t + \beta_2 \dot{K}_t + \varepsilon_t \qquad (۶-۱۰)$$

$\dot{X}_t$ بیانگر نرخ رشد متغیر $X_t$ می‌باشد. در اینجا همخطی بین $\dot{L}$ و $\dot{K}$ عملاً ناچیز است. اما مشکل این است که $\varepsilon_t$ بیانگر تغییرات $u_t$ است که به‌صورت $\varepsilon_t = \frac{du_t}{u_t} \cong \frac{u_t - u_{t-1}}{u_{t-1}}$ می‌باشد. در چنین شرایطی معمولاً $\varepsilon_t$ دچار خودهمبستگی می‌شود که باید برای آن نیز چاره‌ای اندیشید.

### ۶-۳ فرم تابعی نادرست

یکی از فروض معادلات رگرسیونِ کلاسیک این است که فرم تابعی به‌درستی انتخاب شده است. اما ممکن است این فرض درست نباشد. برای آزمون خطی بودن مدل، رمزی (۱۹۶۹) آزمونی را ارائه نموده است که براساس آن می‌توان نادرست بودن شکل تابع را تشخیص داد. این آزمون معروف به آزمون RESETرمزی است. این آزمون از یک رگرسیون کمکی استفاده می‌کند. در این رگرسیون مقادیر باقیمانده ($\hat{u}_t$) بر روی توان‌های مختلف $\hat{Y}_t$ برازش می‌شود.

$$\hat{u}_t = \alpha_1 + \alpha_2 \hat{Y}_t^2 + \alpha_3 \hat{Y}_t^3 + \cdots + \alpha_p \hat{Y}_t^p + v_t \qquad (۶-۱۱)$$

وقتی که $\hat{Y}_t$ با توان‌های مختلف در نظر گرفته می‌شود بدان معنا است که انواع روابط غیرخطی را در نظر گرفته‌ایم. به‌عنوان مثال $\hat{Y}_t^2$ عبارت است از:

$$\hat{Y}_t^2 = (\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2t} + \cdots + \hat{\beta}_K X_{Kt})^2 \qquad (۶-۱۲)$$

در اینجا وقتی پرانتز را به توان برسانیم، هم توان‌های دوم متغیرها و هم حاصل‌ضرب‌های آنها در نظر گرفته شده است.

برای آزمون درستی شکل معادله، از $R^2$ استفاده می‌کنیم. بدین منظور مقدار $R^2$ را برای مدل (۶-۱۱) به‌دست می‌آوریم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، $nR^2$ (برای معادله ۶-۱۱) دارای توزیع مجانبی $\chi^2$ با درجه آزادی $p-1$ می‌باشد ($p$ تعداد پارامترهای تخمینی است)[1]. اگر مقدار $nR^2$ از

[1] در فصل هفتم ثابت می‌شود که $nR^2$ برابر با آماره ضریب لاگرانژ ($LM$) است.

مقدار $\chi^2$ جدول ($\chi^2_{0.05,p-1}$) بزرگتر باشد، فرضیه صفر مبنی بر اینکه «فرم تابعی درست است» رد می‌شود.

آزمون RESETرمزی را با کمک تابع $F$ نیز می‌توان انجام داد. بدین منظور فرض کنید که مدل مورد نظر به‌صورت (۱۳-۶) باشد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t \qquad (۱۳-۶)$$

با تخمین این مدل، مقدار $R^2$ را محاسبه کرده و آن را با $R^2_{old}$ نشان می‌دهیم. حال معادله (۱۳-۶) را در حالی که $\hat{Y}_t^2$، $\hat{Y}_t^3$ و ... را به آن اضافه شده است، برآورد می‌کنیم:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + \gamma_1 \hat{Y}_t^2 + \gamma_2 \hat{Y}_t^3 + \cdots + \gamma_p \hat{Y}_t^{p+1} + v_t \qquad (۱۴-۶)$$

با برآورد این مدل، مقدار $R^2$ نیز به‌دست می‌آید که آن را $R^2_{new}$ می‌نامیم. برای آزمون معنی‌دار بودن متغیرهای $\hat{Y}_t^2$، $\hat{Y}_t^3$ و ...، باید دید که آیا وارد نمودن آنها تفاوت محسوسی در قدرت توضیحی مدل ایجاد کرده است یا نه. بدیهی است که اگر $R^2_{new}$ به اندازه کافی از $R^2_{old}$ بزرگتر باشد می‌توان گفت که فرم تابعی (۱۳-۶) نادرست است و باید فرم دیگری را در نظر گرفت.

بدین منظور از تابع $F$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} F_{p,n-K-p} &= \frac{(R^2_{new} - R^2_{old})/p}{(1-R^2_{new})/(n-K-p)} \\ &= \frac{n-K-p}{p} \frac{R^2_{new} - R^2_{old}}{1-R^2_{new}} \end{aligned} \qquad (۱۵-۶)$$

اگر مقدار $F$ از $F$ جدول ($F_{0.05,p,n-K-p}$) بیشتر باشد، نشان می‌دهد که فرم تابعی (۱۳-۶) نادرست است و باید فرم تابعی دیگری را در نظر بگیریم. این فرم جدید ممکن است همراه با توانهای بالاتر برای $X$ها یا به‌صورت حاصل‌ضرب $X$ها باشد. همچنین ممکن است به‌صورت لگاریتمی و یا هر فرم غیرخطی دیگری باشد.

**آزمون RESET رمزی در Eviews** فایل data2

با برآورد رابطه بین نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) و نرخ رشد نیروی کار (GL) و نرخ رشد موجودی سرمایه (GK)، نتایج زیر به‌دست آمده است:

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/29/11 Time: 01:10
Sample (adjusted): 1346 1380
Included observations: 35 after adjustments

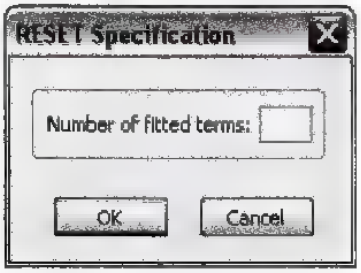
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 1.107676 | 0.174091 | 6.362644 | 0.0000 |
| GK | 0.418728 | 0.072549 | 5.771668 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.691456 | Mean dependent var | 5.677239 |
| Adjusted R-squared | 0.682106 | S.D. dependent var | 7.492675 |
| S.E. of regression | 4.224528 | Akaike info criterion | 5.775138 |
| Sum squared resid | 588.9391 | Schwarz criterion | 5.864015 |
| Log likelihood | -99.06491 | Hannan-Quinn criter. | 5.805818 |
| Durbin-Watson stat | 1.578005 | | |

در پنجره فوق، برای انجام آزمون RESET رمزی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

View → Stability Tests → Ramsey RESET Test

در اینجا پنجره‌ای باز می‌شود که در مقابل گزینه Number of Fitted Terms عددی را باید وارد کنیم که بیانگر مقدار p یعنی توان چند جمله‌ای در معادله (۶-۱۱) می‌باشد. اگر عدد ۱ را وارد کنیم بدان معنا است که فقط $\hat{Y}_t^2$ را در نظر گرفته‌ایم.




با انتخاب OK، نتایج به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: TRG::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Ramsey RESET Test
Equation: UNTITLED
Specification: GYNO GL GK
Omitted Variables: Squares of fitted values

| | Value | df | Probability |
|---|---|---|---|
| t-statistic | 1.902919 | 32 | 0.0661 |
| F-statistic | 3.621101 | (1, 32) | 0.0661 |
| Likelihood ratio | 3.752080 | 1 | 0.0527 |

F-test summary:

| | Sum of Sq | df | Mean Squares |
|---|---|---|---|
| Test SSR | 59.86923 | 1 | 59.86923 |
| Restricted SSR | 588.9391 | 33 | 17.84664 |
| Unrestricted SSR | 529.0699 | 32 | 16.53343 |
| Unrestricted SSR | 529.0699 | 32 | 16.53343 |

LR test summary:

| | Value | df |
|---|---|---|
| Restricted LogL | -99.06491 | 33 |
| Unrestricted LogL | -97.18887 | 32 |

Unrestricted Test Equation:
Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/29/11 Time: 01:12
Sample: 1346 1380
Included observations: 35

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 0.871067 | 0.208657 | 4.174635 | 0.0002 |
| GK | 0.379099 | 0.072868 | 5.202536 | 0.0000 |
| FITTED^2 | 0.016770 | 0.008813 | 1.902919 | 0.0661 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.722821 | Mean dependent var | 5.877239 |
| Adjusted R-squared | 0.705497 | S.D. dependent var | 7.492675 |
| S.E. of regression | 4.066133 | Akaike info criterion | 5.725078 |
| Sum squared resid | 529.0699 | Schwarz criterion | 5.858394 |
| Log likelihood | -97.18887 | Hannan-Quinn criter. | 5.771099 |
| Durbin-Watson stat | 1.497463 | | |

در پنجره فوق، مقدار t مربوط به ضریب $\hat{Y}_t^2$ (که در اینجا با FITTED^2 نشان داده می‌شود) است که در قسمت پایین نیز ارائه شده است. اما مقدار F و احتمال مربوطه نشان می‌دهد که فرم تابعی درست نمی‌باشد و نیاز به در نظر گرفتن فرم دیگری داریم. لازم به ذکر است که مقدار F از RSSهای مقید و غیر مقید به‌دست آمده است که در قسمت F-Test Summary ارائه شده‌اند. همچنین، بعد از F مقدار نسبت درستنمایی نیز محاسبه شده که برابر با ۳/۷۵ می‌باشد و با توجه به احتمال مربوطه، نشان می‌دهد که فرم تابعی، غلط می‌باشد. نسبت درستنمایی (LR) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید که اجزای آن در قسمت LR test summary ارائه شده است:

$$LR = -2[\log(L_R)-\log(L_{UR})] = -۲[(-۹۹/۰۶۴۹۱)-(-۹۷/۱۸۸۸۷)] = ۳/۷۵۲۰۸۰$$

که $L_R$ تابع درستنمایی مقید و $L_{UR}$ تابع درستنمایی غیرمقید می‌باشد.

از طرف دیگر اگر FITTED^2 را که برابر با $(\hat{\beta}_1 GL+\hat{\beta}_2 GK)^2$ است به توان ۲ برسانیم، متغیرهای توضیحی هم با توان ۲ و هم به‌صورت حاصل‌ضرب وارد معادله اصلی می‌شوند. با وارد نمودن این متغیرها، تخمین مدل عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/29/11 Time: 02:07
Sample (adjusted): 1346 1380
Included observations: 35 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 1.104422 | 0.398952 | 2.768258 | 0.0092 |
| GK | 0.262346 | 0.121255 | 2.161117 | 0.0398 |
| GL^2 | 0.000803 | 0.040694 | 0.022197 | 0.9824 |
| GK^2 | 0.011606 | 0.008633 | 1.344246 | 0.1889 |
| GL*GK | 0.002031 | 0.018039 | 0.112590 | 0.9111 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.732655 | Mean dependent var | 5.677239 |
| Adjusted R-squared | 0.697009 | S.D. dependent var | 7.492675 |
| S.E. of regression | 4.124314 | Akaike info criterion | 5.803240 |
| Sum squared resid | 510.2996 | Schwarz criterion | 6.025433 |
| Log likelihood | -96.56870 | Hannan-Quinn criter. | 5.879841 |
| Durbin-Watson stat | 1.668575 | | |

جدول فوق نشان می‌دهد که ضرایب GL^2 و GK*GL کاملاً بی‌معنی هستند، لذا این دو را از معادله حذف کرده و فقط $GK^2$ را نگه می‌داریم. در این حالت، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/29/11 Time: 02:09
Sample (adjusted): 1346 1380
Included observations: 35 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 1.121350 | 0.164716 | 6.807802 | 0.0000 |
| GK | 0.277610 | 0.093577 | 2.966646 | 0.0057 |
| GK^2 | 0.012176 | 0.005492 | 2.217030 | 0.0338 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.732538 | Mean dependent var | 5.677239 |
| Adjusted R-squared | 0.715622 | S.D. dependent var | 7.492675 |
| S.E. of regression | 3.994224 | Akaike info criterion | 5.689392 |
| Sum squared resid | 510.5225 | Schwarz criterion | 5.822708 |
| Log likelihood | -96.56437 | Hannan-Quinn criter. | 5.735413 |
| Durbin-Watson stat | 1.684315 | | |

ملاحظه می‌شود که علاوه بر ضرایب GL و GK، ضریب GK^2 نیز معنی‌دار است. همچنین نسبت به مدل اصلی که فقط شامل متغیرهای توضیحی GL و GK است، دارای $\bar{R}^2$ بالاتری است.

## ۶-۴ حذف متغیرهای مهم

فرض کنید مدل صحیح به‌صورت زیر باشد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad (۶-۱۶)$$

حال تصور کنید که متغیر مهمی مانند $X_{3t}$ را حذف کرده و مدل زیر را برآورد نماییم:

$$Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + u_t \qquad (۶-۱۷)$$

پیامد حذف متغیر مهم $X_{3t}$ آن است که اولاً $\beta_3$ را صفر فرض کرده‌ایم و ثانیاً در برآورد ضریب $X_{2t}$ دچار تورش می‌شویم، زیرا $E(\hat{\alpha}_2) \neq \beta_2$ است. تخمین ضریب $X_{2t}$ از معادله (۶-۱۷) عبارت است از:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum x_{2t} y_t}{\sum x_{2t}^2}$$

از معادله (۶-۱۶) به‌جای $Y_t$ قرار داده و $\hat{\alpha}_2$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{\sum x_{2t} y_t}{\sum x_{2t}^2} = \frac{\sum x_{2t} Y_t}{\sum x_{2t}^2} = \frac{\sum x_{2t}(\beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t)}{\sum x_{2t}^2}$$

$$= \beta_2 + \beta_3 b_{23} + \frac{\sum x_{2t} u_t}{\sum x_{2t}^2}$$

زیرا $\sum x_{2t} = 0$ و $\sum x_{2t} X_{2t} = \sum x_{2t}^2$ است. همچنین $b_{23}$ از رگرسیون $X_{3t} = b_1 + b_{23} X_{2t} + \varepsilon_t$ به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$b_{23} = \frac{\sum x_{2t} x_{3t}}{\sum x_{2t}^2}$$

امید ریاضی $\hat{\alpha}_2$ برابر است با:

$$E(\hat{\alpha}_2) = \beta_2 + \beta_3 b_{23} + E\left(\frac{\sum x_{2t} u_t}{\sum x_{2t}^2}\right)$$

چون امید ریاضی $u_t$ برابر با صفر است لذا خواهیم داشت:

$$E(\hat{\alpha}_2) = \beta_2 + \beta_3 b_{23} \qquad (۶-۱۸)$$

بنابراین مقدار تورش $\hat{\alpha}_2$ بستگی به $\beta_3$ و $b_{23}$ دارد. اگر $\beta_3$ برابر با صفر باشد مقدار تورش نیز صفر خواهد شد. اما چنین نخواهد بود زیرا $X_{3t}$ یک متغیر مهم است و لذا ضریب آن از نظر آماری معنادار است. حالت دیگری که تورش $\hat{\alpha}_2$ را صفر می‌کند، این است که $b_{23}$ صفر باشد. اگر $b_{23}$ صفر باشد بدین معنا است که متغیرهای توضیحی $X_{2t}$ و $X_{3t}$ هیچ رابطه‌ای ندارند و لذا برآورد ضریب $X_{2t}$ متأثر از $X_{3t}$ نخواهد بود.

در حالت کلی فرض کنید که شکل ماتریسی مدل صحیح به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \qquad (۶-۱۹)$$

اما زیر برآورد می‌شود که $K - p$ متغیر از آن حذف شده است:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_p\boldsymbol{\beta}_p + \mathbf{v} \qquad (۶-۲۰)$$

ماتریس $\mathbf{X}_p$ شامل متغیرهای $X_{1t}$ تا $X_{pt}$ می‌باشد، در حالی که $\mathbf{X}$ شامل متغیرهای $X_{1t}$ تا $X_{Kt}$ است که $K>p$ می‌باشد. بدین ترتیب متغیرهای $X_{p+1}$ تا $X_K$ از مدل حذف شده‌اند. با برآورد مدل (۲۰-۶)، تخمین $\beta_p$ عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_p = (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}(\mathbf{X}'_p\mathbf{y})$$

حال به‌جای $\mathbf{y}$ از (۱۹-۶) د (۲۱-۶) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_p &= (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}\mathbf{X}'_p(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u})\\ &= (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}\mathbf{X}'_p\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}\mathbf{X}'_p\mathbf{u} \qquad (۶-۲۲)\end{aligned}$$

اما می‌توان ماتریس $X$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{p1} & X_{p+1,1} & X_{p+2,1} & \cdots & X_{K1} \\ X_{11} & X_{11} & \cdots & X_{p1} & X_{p+1,1} & X_{p+2,1} & \cdots & X_{K1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{11} & X_{11} & \cdots & X_{p1} & X_{p+2,1} & X_{p+2,1} & \cdots & X_{K1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_p & \mathbf{X}_E\end{bmatrix}$$

$\mathbf{X}_E$ ماتریسی است که شامل داده‌های مربوط به $\mathbf{X}_{p+1}$ تا $\mathbf{X}_K$ می‌باشد.

همچنین می‌توان $\boldsymbol{\beta}$ را به‌صورت $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_p \\ \boldsymbol{\beta}_E\end{bmatrix}$ نوشت که $\boldsymbol{\beta}_p$ برداری با ابعاد $p\times 1$ و $\boldsymbol{\beta}_E$ برداری با ابعاد $(K-p)\times 1$ می‌باشد. با جایگذاری به‌جای $\mathbf{X}$ و $\boldsymbol{\beta}$ در (۲۲-۶) می‌توان $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_p &= (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}\mathbf{X}'_p\begin{bmatrix}\mathbf{X}_p & \mathbf{X}_E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_p \\ \boldsymbol{\beta}_E\end{bmatrix} + (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}\mathbf{X}'_p\mathbf{u}\\ &= (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}(\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p\beta_p\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_E\boldsymbol{\beta}_E) + (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}(\mathbf{X}'_p\mathbf{u})\\ &= \boldsymbol{\beta}_p + (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}(\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_E)\boldsymbol{\beta}_E + (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}\mathbf{X}'_p\mathbf{u}\end{aligned}$$

امید ریاضی $\hat{\boldsymbol{\beta}}_p$ عبارت است از:

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p) = \boldsymbol{\beta}_p + (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}(\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_E)\boldsymbol{\beta}_E \qquad (۶-۲۳)$$

توجه شود که $(\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}(\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_E)$ بیانگر ضرایب رگرسیون $K$-$p$ متغیر حذف‌شده ازمدل (۱۶-۶) روی $p$ متغیر $X$ موجود در مدل (۲۰-۶) می‌باشد. بدین منظور، ضرایب آنها را با ماتریس $\mathbf{b}$ نشان می‌دهیم $(\mathbf{X}_E = \mathbf{X}_p\mathbf{b}+\mathbf{v})$ که $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_p)^{-1}(\mathbf{X}'_p\mathbf{X}_E)$ می‌باشد. بنابراین $\mathbf{b}$ ماتریسی با ابعاد $p\times(K-p)$ می‌باشد که عبارت است از:

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_{1,p+1} & b_{1,p+2} & \cdots & b_{1,K} \\ b_{2,p+1} & b_{2,p+2} & \cdots & b_{p,K} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p,p+1} & b_{p,p+2} & \cdots & b_{p,K} \end{bmatrix}_{p\times(K-p)}$$

بنابراین می‌توان (۲۳-۶) را به‌صورت زیر نوشت:

$$E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_p)=\boldsymbol{\beta}_p+\mathbf{b}\boldsymbol{\beta}_E=[\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{b}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_p \\ \boldsymbol{\beta}_E\end{bmatrix}=[\mathbf{I}_2 \quad \mathbf{b}]\boldsymbol{\beta}$$

که $\mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ می‌باشد. سطر نام رابطه فوق عبارت است از:

$$E(\hat{\beta}_{pi})=\beta_i+b_{i,p+1}\beta_{p+1}+b_{i,p+1}\beta_{p+2}+\cdots+b_{I,K}\beta_K \quad , \quad i=1,2,\ldots,p \qquad (۶-۲۴)$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که تخمین پارامترهایی که از معادله (۲۰-۶) به‌دست می‌آید، بدون تورش نمی‌باشند، زیرا $E(\hat{\beta}_{pi})\neq\beta_i$ می‌باشد. فقط در صورتی این تخمین‌ها بدون تورش هستند که عناصر ماتریس $b$ برابر با صفر باشند، یعنی متغیرهای حذف شده با متغیرهایی که در مدل مانده‌اند هیچ‌گونه رابطه خطی نداشته باشند. علاوه بر این، حذف متغیرهای مهم باعث می‌شود که برآورد واریانس رگرسیون ($\sigma^2$) نیز دارای تورش گردد. بدین ترتیب، تخمین انحراف معیار ضرایب نیز تورش خواهند داشت که موجب می‌شود تا نتیجه‌گیری‌هایی که در مورد پارامترها صورت می‌گیرد، دچار خدشه شوند.

اما می‌توان تأثیر «متغیر حذف‌شده» را آزمون نمود. البته این آزمون تا حدود زیادی مشابه با آزمون محدودیت‌ها است که در فصل سوم بحث شد. به‌عنوان مثال فرض کنید که $Y$ تابعی از دو متغیر $X_2$ و $X_3$ است، ولی $X_3$ از مدل حذف شده است. در این حالت ضریب $X_3$ را برابر با صفر قرار داده‌ایم ($\beta_3=0$).

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+u_t \qquad (۶-۲۵)$$

$$Y_t=\alpha_1+\alpha_2X_{2t}+v_t \qquad (۶-۲۶)$$

معادله (۲۵-۶) و (۲۶-۶) به‌ترتیب رگرسیون‌های غیرمقید و مقید را نشان می‌دهد که ضریب تعیین آنها به‌ترتیب $R^2_{UR}$ و $R^2_R$ می‌باشد. برای آزمون این فرضیه، از $F$ استفاده می‌کنیم که عبارت است از:

$$F_{1,n-K}=(n-K)\frac{R^2_{UR}-R^2_R}{1-R^2_{UR}} \qquad (۶-۲۷)$$

توجه داریم که اگر در توزیع $F$ درجه‌آزادی صورت برابر ۱ باشد، آنگاه $F$ برابر با $t^2$ است.

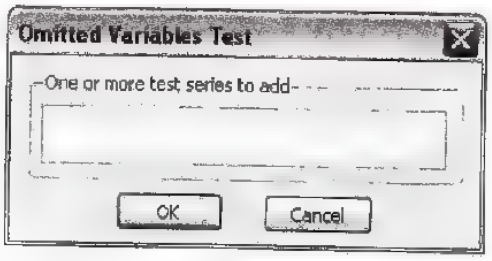
فایل data2

## آزمون متغیرهای حذف شده با استفاده از Eviews

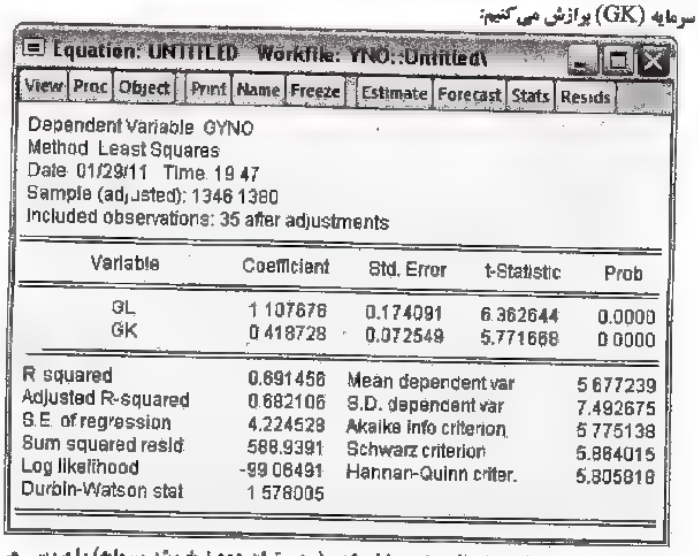
ابتدا مدل مورد نظر را که به‌عنوان مثال معادله (۶-۲۶) می‌باشد برآورد می‌کنیم که نتایج آن در پنجره Equation نشان داده می‌شود. برای بررسی اثر متغیر حذف شده، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

View →Coefficient Diagnostics → Omitted Variable Test

در این حالت پنجره‌ای به نام Omitted–Redundant Variable Test باز می‌شود، که در آن می‌توان نام متغیر یا متغیرهای حذف شده را وارد نمود.




بعد از وارد نمودن نام متغیرهای حذف شده (مثلاً $X_2$) و انتخاب OK، نتایج حاصل از تخمین مدل جدید (یعنی مدلی که به آن متغیرهای حذف شده، اضافه شده است) ارائه می‌شود. علاوه بر تخمین مدل جدید، برای آزمون فرضیهٔ متغیرهای حذف شده، مقادیر F و نسبت درست‌نمایی نیز داده می‌شود. اگر مقدار F بزرگتر از F جدول باشد یا مقادیر احتمال که در مقابل F نوشته می‌شود کمتر از ۰/۰۵ باشد، در این صورت متغیرهای حذف شده اثر معنی‌داری داشته‌اند. به‌عنوان مثال در آزمون Resetرمزی دیدیم که مدل صحیح برای تبیین نرخ رشد تولید ناخالص داخلی به‌گونه‌ای است که بایستی توان دوم نرخ رشد سرمایه را نیز وارد کنیم. این موضوع را می‌توان از طریق آزمون متغیرهای حذف شده نیز بررسی نمود. بدین منظور ابتدا نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) را روی نرخ رشد نیروی کار (GL) و نرخ رشد سرمایه (GK) برازش می‌کنیم:




در پنجرهٔ فوق، به طریقی که گفته شد اثر متغیر حذف شده (یعنی توان دوم نرخ رشد سرمایه) را بررسی می‌کنیم. نتایج حاصله عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Omitted Variables Test
Equation: UNTITLED
Specification: GYNO GL GK
Omitted Variables: GK^2

| | Value | df | Probability |
|---|---|---|---|
| t-statistic | 2.217030 | 32 | 0.0338 |
| F-statistic | 4.915221 | (1, 32) | 0.0338 |
| Likelihood ratio | 5.001082 | 1 | 0.0253 |

F-test summary:

| | Sum of Sq. | df | Mean Squares |
|---|---|---|---|
| Test SSR | 78.41659 | 1 | 78.41659 |
| Restricted SSR | 589.9391 | 33 | 17.84664 |
| Unrestricted SSR | 510.5225 | 32 | 15.95383 |
| Unrestricted SSR | 510.5225 | 32 | 15.95383 |

LR test summary:

| | Value | df |
|---|---|---|
| Restricted LogL | -99.06491 | 33 |
| Unrestricted LogL | -96.56437 | 32 |

Unrestricted Test Equation:
Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/29/11 Time: 19:51
Sample: 1346 1380
Included observations: 35

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 1.121350 | 0.164715 | 6.807802 | 0.0000 |
| GK | 0.277610 | 0.093577 | 2.966645 | 0.0057 |
| GK^2 | 0.012176 | 0.005492 | 2.217030 | 0.0338 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.732539 | Mean dependent var | 5.677239 |
| Adjusted R-squared | 0.715822 | S.D. dependent var | 7.492675 |
| S.E. of regression | 3.994224 | Akaike info criterion | 5.689392 |
| Sum squared resid | 510.5225 | Schwarz criterion | 5.822708 |
| Log likelihood | -96.56437 | Hannan-Quinn criter. | 5.735413 |
| Durbin-Watson stat | 1.684315 | | |

چون مقدار F=۴/۹۱ از F جدول ($F_{۰/۰۵,۱,۳۱}$=۴/۱) بزرگتر است و همچنین چون مقدار احتمال که در مقابل F نوشته شده، کوچکتر از ۰/۰۵ است (برابر با ۰/۰۳۴) لذا بین این دو مدل، تفاوت معناداری وجود دارد. به‌عبارت دیگر متغیر حذف شده اثر معناداری داشته است و نباید حذف شود. جزئیات ارقام ارائه شده در جدول فوق مشابه با آزمون RESETرمزی است.

## ۶-۵ ورود متغیرهای نامربوط

در اینجا بر خلاف حذف متغیرهای مهم، برخی متغیرهایی که ضرورتی ندارند وارد مدل شده‌اند. به‌عنوان مثال فرض کنید که مدل صحیح به‌صورت زیر باشد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \qquad (۶-۲۸)$$

اما به‌جای (۶-۲۸) مدل زیر را برآورد می‌کنیم که شامل متغیر نامربوط $X_5$ می‌باشد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + \beta_5 X_{5t} + u_t \qquad (۶-۲۹)$$

از آنجا که $X_5$ یک متغیر نامربوط و غیرضروری است لذا انتظار داریم که $\beta_5$ برابر با صفر باشد. پیامد ورود چنین متغیری این است که سایر ضرایب هنوز سازگار و بدون تورش هستند. اما تخمین‌زننده‌ها را ناکارآ می‌کند و این موجب می‌شود که انحراف معیار تخمین‌زننده‌ها بزرگ شود. اما به‌طورکلی میزان کاهش در کارایی تخمین‌زننده‌ها بستگی به قدرمطلق ضریب همبستگی بین متغیر نامربوط و سایر متغیرهای توضیحی دارد. زیرا واریانس تخمین‌زننده‌ها رابطه مستقیم با مجذور ضریب همبستگی بین متغیرهای توضیحی دارد. به‌طور کلی اگر متغیر نامربوطی را وارد مدل کنیم که در عین حال با بقیه متغیرهای موجود در مدل ایجاد همخطی نماید، باعث کاهش کارایی تخمین‌زننده‌ها می‌گردد.

فایل data2

**آزمون متغیرهای نامربوط با استفاده از Eviews**

مراحل انجام این آزمون دقیقاً مشابه با آزمون متغیرهای حذف شده است. ولی توجه داشته باشیم که در اینجا نام متغیرهایی را وارد می‌کنیم که بایستی از مدل حذف شوند. به‌عنوان مثال ابتدا مدل (۲۹-۶) را تخمین می‌زنیم و سپس در پنجره‌ای که نتایج تخمین نشان داده شده است از طریق View → Coefficient Diagnostics → Redundant Variable Test پنجره‌ای باز می‌شود که در آن، نام متغیرهای نامربوط را وارد می‌کنیم و با انتخاب OK نتایج مورد نظر به‌دست می‌آید. نتایج حاصل از برآورد مدل جدید به همراه مقدار F و احتمال آن نیز داده می‌شود. در اینجا نیز اگر مقدار F بزرگتر از F جدول و یا احتمال‌های آن کمتر از ۰/۰۵ باشد در این صورت متغیری را که از مدل اولیه کنار می‌گذاریم یک متغیر نامربوط و زائد نیست و بایستی در مدل حفظ شود.

به‌عنوان مثال معادله سرمایه‌گذاری خصوصی (IP) روی نرخ بهره حقیقی (RR) و درآمد ملی (Y) برازش شده است. نتیجه عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: S3::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

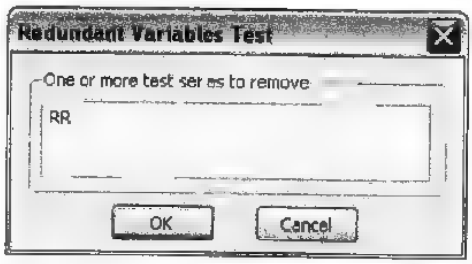
Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 10/13/11 Time: 15:58
Sample: 1345 1380
Included observations: 36

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -7388.982 | 5077.892 | -1.454791 | 0.1552 |
| RR | 97.82949 | 165.7167 | 0.590342 | 0.5590 |
| Y | 0.159006 | 0.023502 | 6.766874 | 0.0000 |

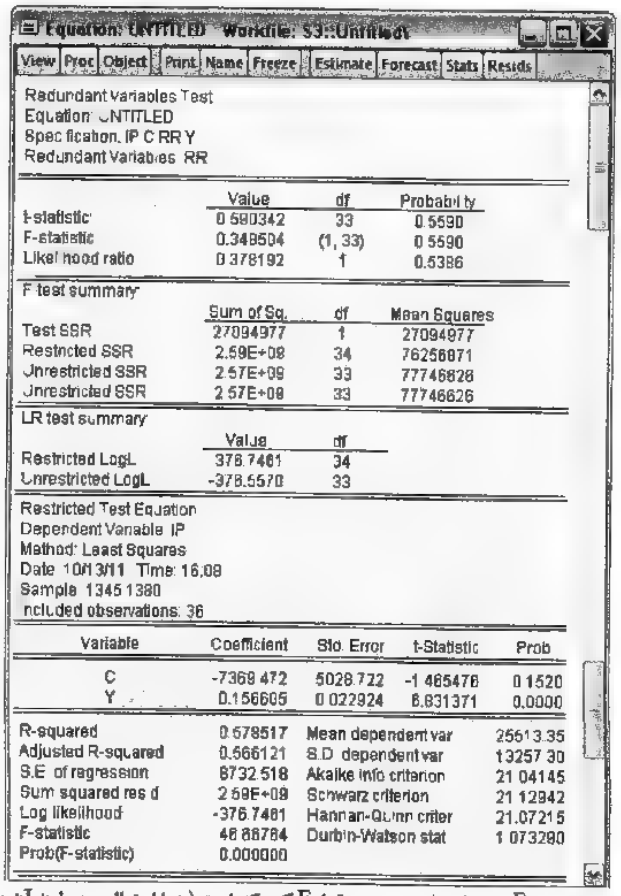
| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.582922 | Mean dependent var | 25513.35 |
| Adjusted R-squared | 0.557645 | S.D. dependent var | 13267.30 |
| S.E. of regression | 8617.405 | Akaike info criterion | 21.08650 |
| Sum squared resid | 2.57E+09 | Schwarz criterion | 21.21846 |
| Log likelihood | -378.5570 | Hannan-Quinn criter. | 21.13256 |
| F-statistic | 23.06096 | Durbin-Watson stat | 1.063540 |
| Prob(F-statistic) | 0.000001 | | |

حال بررسی می‌کنیم که آیا نرخ بهره (RR) یک متغیر زائد است یا خیر. بدین منظور، در پنجره فوق، مسیر

View→Coefficient Diagnostics → Redundant Variable Test را انتخاب می‌کنیم که پنجره Redundant Variable Test باز می‌شود. در این پنجره نام متغیر مورد نظر (متغیر زائد) را وارد می‌کنیم.




با انتخاب OK نتایج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



Equation: UNTITLED Workfile: S3::Untitled

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Redundant Variables Test
Equation: UNTITLED
Specification: IP C RR Y
Redundant Variables: RR

| | Value | df | Probability |
|---|---|---|---|
| t-statistic | 0.590342 | 33 | 0.5590 |
| F-statistic | 0.348504 | (1, 33) | 0.5590 |
| Likelihood ratio | 0.378192 | 1 | 0.5386 |

F-test summary

| | Sum of Sq. | df | Mean Squares |
|---|---|---|---|
| Test SSR | 27094977 | 1 | 27094977 |
| Restricted SSR | 2.59E+09 | 34 | 76256871 |
| Unrestricted SSR | 2.57E+09 | 33 | 77746826 |
| Unrestricted SSR | 2.57E+09 | 33 | 77746826 |

LR test summary

| | Value | df |
|---|---|---|
| Restricted LogL | 378.7461 | 34 |
| Unrestricted LogL | -378.5570 | 33 |

Restricted Test Equation
Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 10/13/11 Time: 16:08
Sample: 1345 1380
Included observations: 36

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -7369.472 | 5028.722 | -1.465476 | 0.1520 |
| Y | 0.156605 | 0.022924 | 6.831371 | 0.0000 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.678517 | Mean dependent var | 25513.35 |
| Adjusted R-squared | 0.666121 | S.D. dependent var | 13257.30 |
| S.E. of regression | 8732.518 | Akaike info criterion | 21.04145 |
| Sum squared resid | 2.59E+09 | Schwarz criterion | 21.12942 |
| Log likelihood | -376.7461 | Hannan-Quinn criter. | 21.07215 |
| F-statistic | 46.88784 | Durbin-Watson stat | 1.073290 |
| Prob(F-statistic) | 0.000000 | | |

در بالای جدول مقدار F داده شده است. چون مقدار F کوچک است (و یا احتمال مربوط به آن بزرگتر از ۰/۰۵ است) لذا زائد بودن RR رد نمی‌شود. در اینجا سایر مقادیری که داده شده است مشابه آزمون RESET رمزی است. در پایین این جدول، معادله‌ای برآورد شده است که بدون متغیر زائد می‌باشد.

## ۶-۶ آزمون‌های ثبات ضرایب

معادله رگرسیون زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad (۶-۳۰)$$

فرض ضمنی در این معادله این است که ضرایب $\beta_1$، $\beta_2$ و $\beta_3$ ثابت هستند. به‌عبارت دیگر این ضرایب چه در کل دوره مورد بررسی برآورد شوند و چه در بخشی از دوره مورد بررسی برآورد گردند، نتایج یکسانی به‌دست خواهد آمد. به‌عنوان مثال اگر معادله‌ای برای دوره ۸۰-۱۳۳۸ برآورد می‌کنیم ضرایب این معادله برای کل این دوره همان چیزی است که در دوره قبل و بعد از انقلاب به‌دست می‌آید.

اما این فرض را می‌توان در معرض آزمون قرار داد، زیرا ممکن است چنین فرضی برقرار نباشد. بدین منظور می‌توان کل دوره مورد مطالعه را به دو دوره و یا چند دوره تقسیم نمود و فرض ثبات ضرایب را مورد بررسی و آزمون قرار داد. یکی از آزمون‌های تغییر ضرایب، معروف به آزمون چاو است که در اینجا روش انجام این آزمون را بررسی می‌کنیم. روش دیگر، استفاده از متغیرهای مجازی است که در ادامه بررسی خواهد شد.

### ۶-۶-۱ آزمون نقطه شکست چاو[1]

مراحل انجام آزمون چاو عبارت است از:

۱- دوره مورد مطالعه را به دو دوره تقسیم می‌کنیم که دوره اول و دوم به‌ترتیب شامل $n_1$ و $n_2$ مشاهده می‌باشند ($n_1 + n_2 = n$).

۲- رگرسیون مورد نظر را برای دوره اول و دوره دوم برآورد می‌کنیم. مجموع مجذور خطا برای دوره اول را با $RSS_1$ و برای دوره دوم با $RSS_2$ نشان می‌دهیم و مجموع این‌دو را $RSS_{UR} = RSS_1 + RSS_2$ می‌نامیم که بیانگر رگرسیون غیرمقید است، زیرا ضرایب آزاد هستند تا در این دو دوره، متفاوت باشند. درجه آزادی $RSS_1$ و $RSS_2$ به‌ترتیب برابر با $n_1 - K$ و $n_2 - K$ می‌باشد و لذا درجه آزادی $RSS_{UR}$ نیز برابر با $n - 2K$ خواهد بود.

[1] Chow breakpoint test

۳- معادله مورد نظر را برای کل دوره برآورد کرده و مجموع مجذور باقیمانده‌های آن را با $RSS_R = RSS$ نشان می‌دهیم که بیانگر رگرسیون مقید است، زیرا ضرایب در هر دو دوره یکسان در نظر گرفته شده‌اند. درجه آزادی $RSS_R$ برابر با $n-K$ است.

۴- برای بررسی تغییر ساختاری، بایستی $RSS_{UR}$ و $RSS_R$ را مقایسه کنیم. بدین منظور از نسبت $F$ استفاده می‌کنیم:

$$F_{K,n-2K} = \frac{n-2K}{K}\,\frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}} = \frac{n-2K}{K}\,\frac{RSS-(RSS_1+RSS_2)}{RSS_1+RSS_2} \qquad (۶-۳۱)$$

تفاوت رگرسیون مقید و غیرمقید، فقط در ضرایب آنها است. اگر ضرایب باثبات باشند در این صورت تفاوت چندانی بین $RSS$ و $RSS_1+RSS_2$ وجود ندارد و لذا مقدار $F$ نیز کوچک می‌شود، در غیر این صورت مقدار $F$ بزرگ شده و فرضیه ثبات ضرایب رد می‌شود.

**آزمون نقطه شکست چاو در Eviews** فایل data2

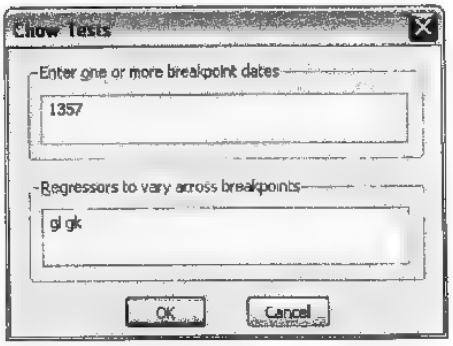
تصور کنید که می‌خواهیم نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) را روی نرخ رشد کار (GL) و نرخ رشد سرمایه (GK) برازش کنیم. بدین منظور ابتدا معادله مورد نظر را برای دوره ۸۰-۱۳۴۶ برآورد می‌کنیم که حجم نمونه n=۳۵ می‌باشد. نتایج تخمین عبارت است از:

$$GYNO=1.107GL+0.419GK \qquad R^2=0.691 \quad \bar{R}^2=0.682$$
$$(6.4) \qquad (5.8) \qquad RSS=588.94$$

توجه شود که در پنجرهٔ نتایج، RSS با Sum squared resid نشان داده شده است. حال می‌خواهیم ثبات ضرایب نیروی کار و سرمایه طی دوره مورد نظر را بررسی کنیم. بدین منظور دوره قبل و بعد از انقلاب را در نظر می‌گیریم. برای انجام آزمون چاو، در پنجرهٔ نتایج تخمین، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

View → Stability Diagnostics → Chow Breakpoint Test

در پنجرهٔ Chow Test سال شروع دوره دوم را وارد کنیم (در این مثال سال ۱۳۵۷ می‌باشد):




در پنجره فوق، متغیرهای توضیحی و همچنین عرض از مبدأ را می‌توان وارد نمود. اگر فقط C را بنویسیم، آنگاه فقط تغییر در عرض از مبدأ را لحاظ می‌کند. اما اگر C و GL را بنویسیم، آنگاه تغییر در عرض از مبدأ و ضریب GL را

لحاظ می‌کند. همچنین اگر تمام متغیرها را بنویسیم، در این صورت تغییر تمام ضرایب را لحاظ کرده و آزمون می‌کند.

با انتخاب OK، نتایج آزمون چاو به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: TNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Chow Forecast Test
Equation: UNTITLED
Specification: GYNO GL GK
Test predictions for observations from 1357 to 1390

| | Value | df | Probability |
|---|---|---|---|
| F-statistic | 0.420224 | (24, 9) | 0.9565 |
| Likelihood ratio | 28.30943 | 24 | 0.3377 |

F-test summary:

| | Sum of Sq. | df | Mean Squares |
|---|---|---|---|
| Test SSR | 311.2160 | 24 | 12.96733 |
| Restricted SSR | 588.9391 | 33 | 17.84664 |
| Unrestricted SSR | 277.7231 | 9 | 30.85813 |
| Unrestricted SSR | 277.7231 | 9 | 30.85813 |

LR test summary:

| | Value | df |
|---|---|---|
| Restricted LogL | -99.08491 | 33 |
| Unrestricted LogL | -85.91019 | 9 |

Unrestricted log likelihood adjusts test equation results to account for observations in forecast sample

Unrestricted Test Equation:
Dependent Variable: GYNO
Method: Least Squares
Date: 01/29/11 Time: 20:51
Sample: 1346 1356
Included observations: 11

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| GL | 1.415792 | 0.465405 | 3.042062 | 0.0140 |
| GK | 0.481937 | 0.127818 | 3.770482 | 0.0044 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.459899 | Mean dependent var | 12.18188 |
| Adjusted R-squared | 0.398777 | S.D. dependent var | 7.164186 |
| S.E. of regression | 5.555009 | Akaike info criterion | 6.430243 |
| Sum squared resid | 277.7231 | Schwarz criterion | 6.502587 |
| Log likelihood | -33.36634 | Hannan-Quinn criter. | 6.384640 |
| Durbin-Watson stat | 1.152511 | | |

با توجه به مقدار F که از F جدول کوچکتر است و همچنین احتمال آن که از ۰/۰۵ بزرگتر است، فرضیه ثبات ضرایب رد نمی‌شود. لذا ضرایب این معادله، در دوره‌های قبل و بعد از انقلاب، متفاوت نیست.

توجه شود که آزمون چاو را می‌توان برای چند دوره نیز انجام داد. به‌عنوان مثال اگر بخواهیم، آزمون ثبات ضرایب را برای دوره‌های ۵۶-۱۳۴۶، ۷۰-۱۳۵۷ و ۸۰-۱۳۷۱ انجام دهیم، لازم است که در پنجره مورد نظر، به ترتیب سال ۱۳۵۷ (سال شروع دوره دوم) و سال ۱۳۷۱ (سال شروع دوره سوم) را وارد نماییم.

## ۲-۶-۶ آزمون پیش‌بینی چاو[1]

آزمون پیش‌بینی چاو بر این اساس است که اگر ضرایب باثبات باشند، خطای پیش‌بینی کوچک خواهد بود. بدین منظور کل داده‌ها را به دو دوره تقسیم می‌کنیم: دوره اول با $n_1$ مشاهده و دوره دوم با $n_2$ مشاهده. دوره اول را برای تخمین و دوره دوم را برای پیش‌بینی در نظر

[1] Chow forecast test

می‌گیریم. اگر ضرایب با ثبات باشند، بایستی متوسط خطای پیش‌بینی در دوره دوم ($\sigma_f^2$) و متوسط خطای رگرسیون در دوره اول ($\sigma^2$)، تقریباً یکسان باشند. بنابراین، فرضیه ثبات ضرایب به‌صورت $H_0: \sigma^2 = \sigma_f^2$ می‌باشد. در غیر این صورت، رگرسیون دچار شکستگی شده است و لذا رگرسیون بر اساس داده‌های گذشته، نمی‌تواند مقادیر آینده را به‌خوبی پیش‌بینی کند. بدین منظور، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ را برای $n_1$ مشاهدهٔ اول (دوره اول) برآورد کرده و مجموع مجذور باقیمانده را با $RSS_1$ نشان می‌دهیم.

$$RSS_1 = \sum_{t=1}^{n_1} (Y_t - \hat{Y}_t)^2 \quad , \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{RSS_1}{n_1 - K} \tag{۶-۳۲}$$

۲- برای دوره دوم که از سال $n_1+1$ تا $n$ می‌باشد، مقادیر $Y_t$ را با استفاده از رگرسیون برآوردی در مرحلهٔ ۱، پیش‌بینی می‌کنیم:

$$Y_t^f = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t \quad ; \quad t = n_1 + 1, \ldots, n \tag{۶-۳۳}$$

۳- خطاهای پیش‌بینی را به‌صورت زیر برای دوره دوم حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} e_t^f &= Y_t - Y_t^f \\ &= (\alpha + \beta X_t + u_t) - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_t) \\ &= -(\hat{\alpha} - \alpha) - (\hat{\beta} - \beta) X_t + u_t \quad ; \quad t = n_1 + 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{۶-۳۴}$$

امید ریاضی و واریانس خطای پیش‌بینی عبارت است از (به بخش ۱۴-۲ مراجعه شود):

$$\begin{aligned} E(e_t^f) &= 0 \\ \operatorname{var}(e_t^f) &= \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{n} + (X_t - \bar{X})^2 \Big/ \sum_{t=n_1+1}^{n} x_t^2 \right) \end{aligned} \tag{۶-۳۵}$$

همچنین مجموع مجذور خطاهای پیش‌بینی و میانگین خطای پیش‌بینی عبارت است از:

$$RSS_f = \sum_{t=n_1+1}^{n} (Y_t - Y_t^f)^2 \quad , \quad \hat{\sigma}_f^2 = \frac{RSS_f}{n_2} \tag{۶-۳۶}$$

توجه شود که در اینجا، درجه آزادی برابر با $n_2$ است، زیرا برای محاسبه $RSS_f$ هیچ ضریبی را برآورد نکرده‌ایم.

۴- در صورتی که ضرایب ثابت باشند نباید تفاوت معناداری بین $\hat{\sigma}_f^2$ و $\hat{\sigma}^2$ باشد. برای آزمون فرضیه $H_0: \sigma^2 = \sigma_f^2$، آماره $F$ را تشکیل می‌دهیم:

$$F_{n_2,n_1-k}=\frac{\chi^2_{n_2}/n_2}{\chi^2_{n_1-K}/(n_1-K)}=\frac{\hat{\sigma}_f^2/\sigma_f^2}{\hat{\sigma}^2/\sigma_2} \qquad (۶-۳۷)$$

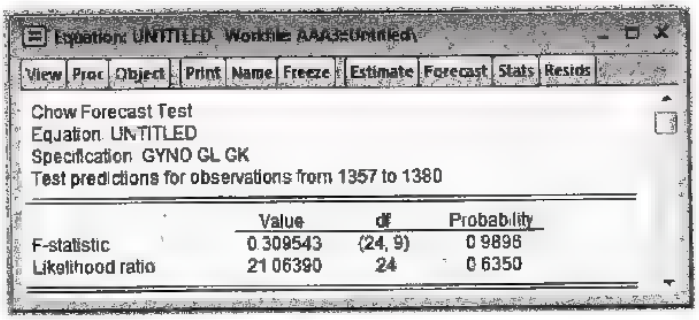
تحت فرضیه $H_0$، آماره $F$ عبارت است از:

$$F_{n_2,n_1-K}=\left.\frac{\hat{\sigma}_f^2/\sigma_f^2}{\hat{\sigma}^2/\sigma_2}\right|_{H_0}=\frac{\hat{\sigma}_f^2}{\hat{\sigma}^2}$$
$$=\frac{RSS_f/n_2}{RSS_1/n_1-K}=\frac{n_1-K}{n_2}\frac{RSS_f}{RSS_1} \qquad (۶-۳۸)$$

اگر فرضیه $H_0$ درست باشد، مقدار $F$ کوچک خواهد بود و در ناحیه بحرانی قرار نمی‌گیرد و لذا ضرایب باثبات خواهند بود.

**آزمون پیش‌بینی چاو در Eviews** فایل data2

ابتدا معادله را برای کل دوره برآورد کرده و سپس مشابه آزمون چاو عمل می‌کنیم، با این تفاوت که به جای گزینه Chow Breakpoint Test گزینه Chow Forecast Test را انتخاب می‌کنیم. نتایج در پنجره‌ای به‌صورت زیر نشان داده می‌شود.




چون مقدار F کوچک است و در ناحیه بحرانی قرار ندارد، لذا فرضیه ثبات ضرایب رد نمی‌شود.

### ۳-۶-۶ آزمون‌های بازگشتی

آزمون‌های بازگشتی مبتنی بر برآورد ضرایب برای دوره‌های مختلف است. لذا این روش‌ها حالت عمومی‌تری از آزمون چاو هستند. اگر دوره‌ها را با $s$ نشان دهیم، دوره اول شامل $K$ مشاهدهٔ اول ( $K$ تعداد متغیرهای توضیحی است)، دوره دوم شامل $K+1$ مشاهدهٔ بعدی و دوره آخر شامل کل مشاهدات( $n$ ) است. بنابراین، برآورد ضرایب رگرسیون ساده، عبارت است از:

$$\hat{\alpha}_s=\bar{Y}_s-\hat{\beta}_s\bar{X}_s \quad , \quad \hat{\beta}_s=\frac{\sum_{t=1}^{s}x_t y_t}{\sum_{t=1}^{s}x_t^2} \quad ; \quad s=K,K+1,\ldots,n \tag{۶-۳۹}$$

$$\bar{Y}_s=\frac{\sum_{t=1}^{s}Y_t}{s} \quad , \quad X_s=\frac{\sum_{t=1}^{s}X_t}{s}$$

در حالت کلی (رگرسیون $K$متغیره) می‌توان تخمین‌های بازگشتی را به‌صورت زیر نشان داد:

$$\boldsymbol{\beta}_s=(\mathbf{X}_s'\mathbf{X}_s)^{-1}\mathbf{X}_s'\mathbf{y}_s \quad ; \quad s=K,K+1,\cdots,n \tag{۶-۴۰}$$

از طرف دیگر به‌ازای هر یک از برآوردهای بازگشتی، $RSS_s$ را محاسبه می‌کنیم:

$$RSS_s=\sum_{t=1}^{s}(Y_t-\hat{Y}_t)^2=\sum_{t=1}^{s}(Y_t-\hat{\alpha}_s-\hat{\beta}_s X_t)^2 \quad ; \quad s=K+1,\ldots,n \tag{۶-۴۱}$$

بدیهی است که به‌ازای $s=K$، مقدار $RSS_s$ برابر صفر است (چرا؟).

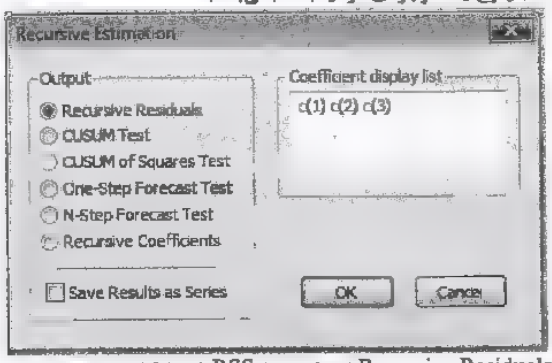
حال اگر ضرایب بازگشتی یا $RSS$های بازگشتی را محاسبه و ترسیم کنیم، روند آنها نشان می‌دهد که در چه سالی تغییر ضرایب رخ داده است. معمولاً نرم‌افزاهایی مانند Eviews این محاسبات را انجام داده و نمودار آنها را همراه با «به‌اضافه و منهای دو انحراف معیار» ترسیم می‌کند. اگر $RSS$ها از این مرزها عبور کنند نشان‌دهندهٔ تغییرات ساختاری است.

**برآوردهای بازگشتی در Eviews** فایل data2

ابتدا معادله مورد نظر را برآورد می‌کنیم و در پنجرهٔ نتایج، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

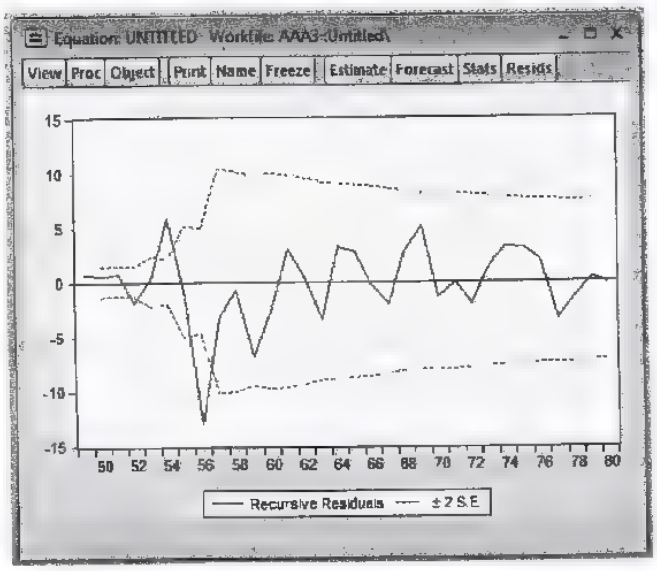
View → Stability Diagnostics → Recursive Estimates (OLS only)

پنجرهٔ زیر باز می‌شود (معادلهٔ برآوردی بیانگر رگرسیون نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) روی عرض از مبدأ، نرخ رشد نیروی کار (GL) و نرخ رشد موجودی سرمایه (GK) می‌باشد):



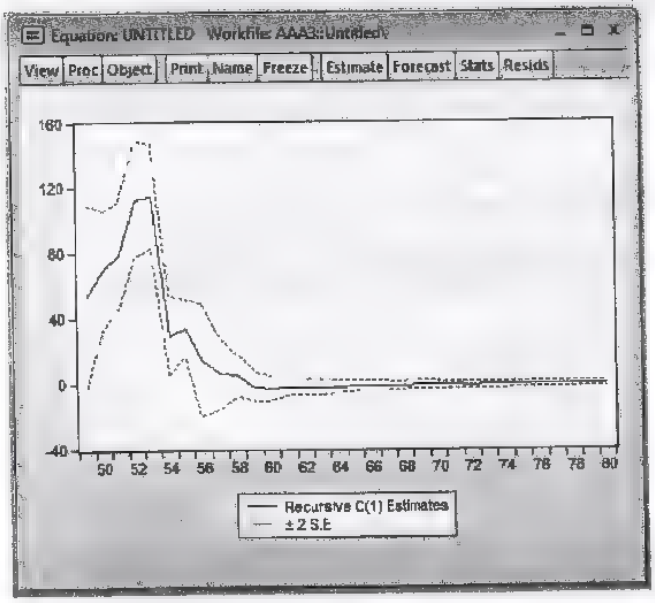

در پنجرهٔ فوق، گزینهٔ Recursive Residuals نمودار و مرز RSSهای بازگشتی را رسم می‌کند. همچنین، گزینهٔ آخر، یعنی Recursive Coefficients، نمودار و مرز هر یک از ضرایب را رسم می‌کند. در سمت راست پنجره فوق، می‌توان هر

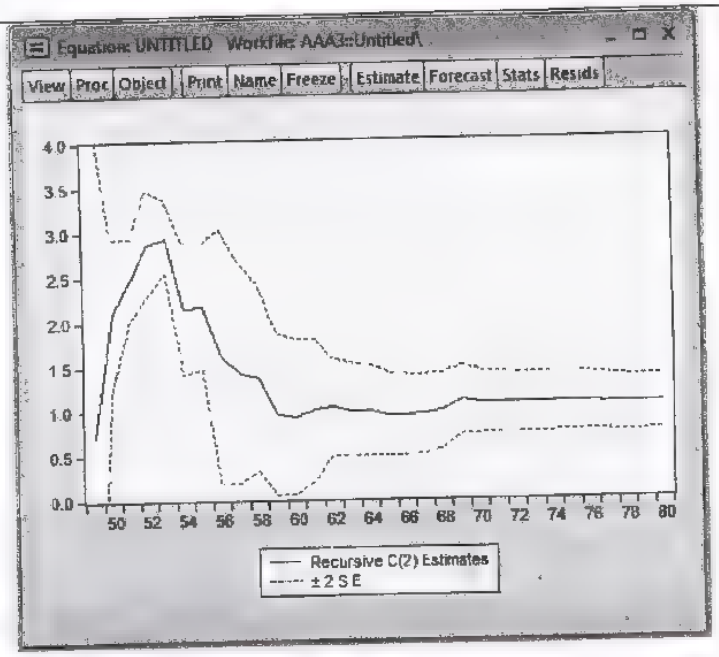
یک از ضرایب را انتخاب نموده و نمودارهای مربوطه را ترسیم نمود. به‌عنوان نمونه، RSSهای بازگشتی برای همه ضرایب عبارت است از:

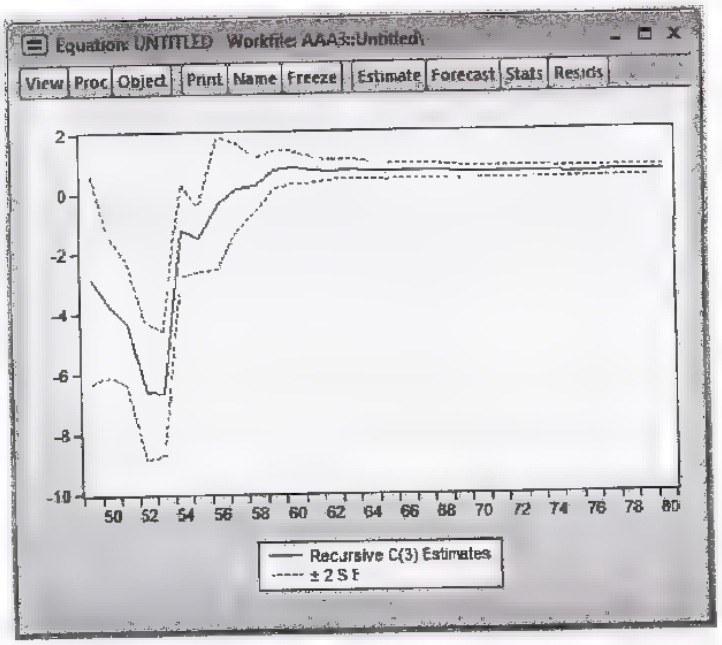



در سال۱۳۵۲، ۱۳۵٤ و ۱۳۵٦ تغییر ساختاری رخ داده است، زیرا RSSها از مرز خارج شده‌اند.

برای هر یک از ضرایب، نمودارهای زیر به‌دست آمده است و نشان می‌دهد که ضرایب C(1)، C(2) و C(3) از سال ۱۳۵۸ به بعد تقریباً باثبات بوده‌اند.




Equation: UNTITLED Workfile: AAA3::Untitled\
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80
Recursive C(2) Estimates
± 2 S E


Equation: UNTITLED Workfile: AAA3::Untitled\
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80
Recursive C(3) Estimates
± 2 S E

### ٤-٦-٦ پیش‌بینی یک‌قدمی

روش پیش‌بینی یک‌قدمی شیوه دیگری برای بررسی شکست ساختاری و تغییر ضرایب است. در این روش، ضرایب بر اساس داده‌های یک دوره تخمین زده می‌شوند و سپس مقدار $Y$ برای سال بعد پیش‌بینی می‌شود. بدین منظور فرض کنید که حجم مشاهدات برابر با $n$ باشد. معادله را برای $s$ مشاهدهٔ اول، برآورد می‌کنیم:

$$\hat{Y}_t = \hat{\alpha}_s + \hat{\beta}_s X_t \ ; \ t = ۱,\dots,s \ , \ s \geq K$$

$$\hat{\alpha}_s = \overline{Y}_s - \hat{\beta}_s \overline{X}_s \ , \ \hat{\beta}_s = \frac{\sum_{t=۱}^{s} x_t y_t}{\sum_{t=۱}^{s} x_t^۲} \quad ; \quad \overline{Y}_s = \frac{\sum_{t=۱}^{s} Y_t}{n} \ , \ \overline{X}_s = \frac{\sum_{t=۱}^{s} X_t}{n} \qquad (۶-۴۲)$$

اگر $s = t-۱$ باشد، خطای پیش‌بینی یک‌قدمی (یک‌دوره‌ای) برابر است با:

$$e_t^f = Y_t - Y_t^f = Y_t - \hat{\alpha}_s - \hat{\beta}_s X_t \quad ; \quad s = t-۱ \qquad (۶-۴۳)$$

واریانس خطای پیش‌بینی یک قدمی عبارت است از (به بخش ۱۴-۲ مراجعه شود):[1]

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(e_t^f) &= \mathrm{var}(Y_t - Y_t^f) = \mathrm{var}(Y_t - \hat{\alpha}_s - \hat{\beta}_s X_t) \\ &= \sigma^۲ \left( ۱ + \frac{۱}{n} + (X_t - \overline{X}_s)^۲ \Big/ \sum_{t=۱}^{s} x_t^۲ \right) \quad ; \quad s = t-۱ \end{aligned} \qquad (۶-۴۴)$$

---

[1] در حالت $K$ متغیره روابط زیر را داریم:

$$Y_t = \sum_{i=۱}^{K} X_{it} + u_t = (۱ \ \ X_{۲t} \ \dots \ X_{Kt}) \begin{pmatrix} \beta_۱ \\ \beta_۲ \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix} + u_t = z_t' \beta + u_t$$

$\mathbf{z}_t$ بردار ستونی است که مشاهدات سال $t$ را برای متغیرهای توضیحی نشان می‌دهد. $Y_t$ مقدار $Y$ در سال $t$ است. شکل ماتریسی رابطه فوق عبارت است از:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \ , \ \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-۱}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

اگر $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ را برای داده‌های $t = ۱, \dots s$ بنویسیم، آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_s = (\mathbf{X}_s'\mathbf{X}_s)^{-۱}\mathbf{X}_s'\mathbf{y}_s \quad ; \quad s = K, K+۱, \dots, t-۱$$

خطای پیش‌بینی یک قدمی برابر است با:

$$e_t^f = Y_t - Y_t^f = Y_t - \mathbf{z}_t'\hat{\boldsymbol{\beta}}_s \quad ; \quad s = t-۱$$

واریانس خطای پیش‌بینی یک قدمی عبارت است:

$$\mathrm{var}(e_t^f) = \mathrm{var}(Y_t - Y_t^f) = \sigma^۲ \left( ۱ + \mathbf{z}_t'(\mathbf{X}_s'\mathbf{X}_s)^{-۱}\mathbf{z}_t \right)$$

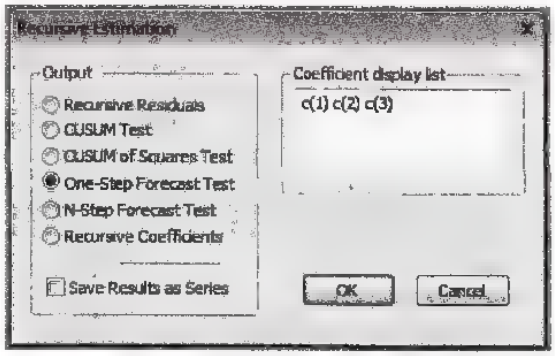
$\sigma^2$ مجهول است که به جای آن از واریانس جملات خطاهای $s$ مشاهدهٔ اول استفاده می‌کنیم. با محاسبه انحراف معیار خطای پیش‌بینی، می‌توان «به‌اضافه و منهای دو برابر انحراف معیار» را نیز حساب نمود. در هر سالی که خطای پیش‌بینی از این مرز (به‌اضافه و منهای دو برابر انحراف معیار) خارج شود، بیانگر عدم ثبات ضرایب است. در واقع اگر $e_t^f$ نزدیک به صفر باشد، ضرایب باثبات هستند و به همین دلیل، خطای پیش‌بینی نیز ناچیز خواهد بود.

**آزمون پیش‌بینی یک‌قدمی در Eviews** فایل data2

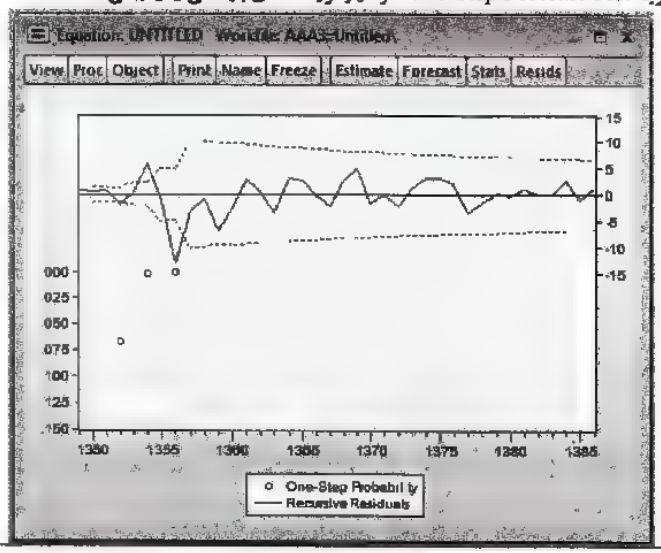
ابتدا معادله مورد نظر را برآورد می‌کنیم و در پنجرهٔ نتایج، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

View → Stability Diagnostics → Recursive Estimates (OLS only)

پنجرهٔ زیر باز می‌شود (معادلهٔ برآوردی بیانگر رگرسیون نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) روی عرض از مبدأ، نرخ رشد نیروی کار (GL) و نرخ رشد موجودی سرمایه (GK) می‌باشد):




در پنجرهٔ فوق، گزینهٔ One-Step Forecast Test نمودار و مرز خطاهای بازگشتی را رسم می‌کند.



نمودار فوق نشان می‌دهد که در برخی از سالها (در اینجا سه سال)، خطاهای پیش‌بینی یک‌قدمی، از مرزها فراتر رفته است. محور عمودی سمت راست، مقدار خطاها و مرزها را نشان می‌دهد. محور عمودی سمت چپ، مقدار احتمال تقاطی که از مرز خارج شده‌اند را نشان می‌دهند. مثلاً در سال ۱۳٥٦ که خارج از مرز است، احتمال آن ۰/۰۰۱ است (اگر نشانگر ماوس را روی نقطه موردنظر نگه دارید، سال و مقدار احتمال را مشخص می‌کند). همچنین در سال ۱۳٥۲ احتمال برابر با ۰/۰۰۲٥ و در سال ۱۳٥۲ احتمال برابر با ۰/۰٦۷۱ است. بنابراین، تغییر ضرایب در سال ۱۳٥٤ و ۱۳٥٦ در سطح ۰/۰٥ و حتی در سطح ۰/۰۱ معنادار است، اما در سال ۱۳٥۲ در سطح ۰/۰٦۷ درصد.

### ٥-٦-٦ آزمون مجموع تجمعی خطاهای بازگشتی (CUSUM)

در مبحث پیش‌بینی یک قدمی برای سال $t$ دیدیم که خطای پیش‌بینی و واریانس آن عبارت است از:

$$e_t^f = Y_t - Y_t^f = Y_t - \hat{\alpha}_s - \hat{\beta}_s X_t \quad ; \quad s = t-1$$
$$\mathrm{var}(e_t^f) = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + (X_t - \overline{X}_s)^2 \Big/ \sum_{t=1}^{s} x_t^2\right) \quad ; \quad s = t-1 \qquad (۶-۴۵)$$

حال خطاهای بازگشتی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$w_t = \frac{e_t^f}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_t - \overline{X}_s)^2}{\sum_{t=1}^{s} x_t^2}}} \quad ; \quad s = t-1 \ , \ t = K+1, \dots, n \qquad (۶-۴۶)$$

$w_t$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2$ دارد. حال $w_t$ها را استاندارد کرده و مقدار تجمعی آنها را حساب می‌کنیم:

$$W_t = \sum_{j=K+1}^{t} \frac{w_j}{\hat{\sigma}} \quad ; \quad t = K+1, \dots, n \ , \ \hat{\sigma}^2 = \frac{RSS_n}{n-K} \qquad (۶-۴۷)$$

$RSS_n$ مجموع مجذور خطاها برای معادله‌ای است که با تمامی مشاهدات برازش شده است. اگر ضرایب باثبات باشند، در این صورت خطای پیش‌بینی ناچیز است و لذا مجموع تجمعی آنها نیز کوچک خواهد بود و در نتیجه، $W_t$ نزدیک به صفر می‌باشد (یعنی نزدیک به امید ریاضی آن، زیرا $E(W_t) = 0$ است). در غیر این صورت، $W_t$ تفاوت معناداری با صفر خواهد داشت. برای آزمون $W_t$ مرزهایی تعیین می‌شود که اگر $W_t$ از این مرزها عبور کند نشان‌دهندهٔ تغییر ضرایب

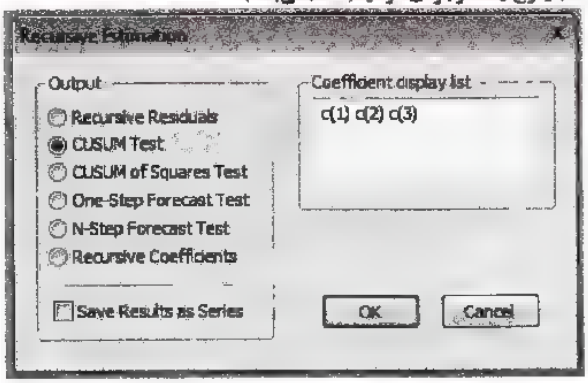
می‌باشد. مختصات شروع این مرزها برابر با $(K,\pm a\sqrt{n-K})$ و مختصات نقطهٔ پایان آن برابر با $(n,\pm 3a\sqrt{n-K})$ می‌باشد.

**آزمون مجموع تجمعی خطاها (CUSUM) در Eviews** فایل data2

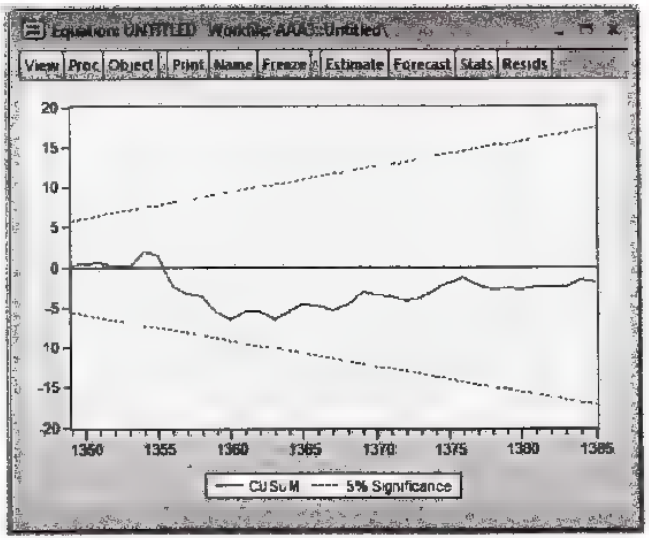
ابتدا معادله مورد نظر را برآورد می‌کنیم و در پنجرهٔ نتایج، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

View → Stability Diagnostics → Recursive Estimates (OLS only)

پنجرهٔ زیر باز می‌شود(معادلهٔ برآوردی بیانگر رگرسیون نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) روی عرض از مبدأ، نرخ رشد نیروی کار (GL) و نرخ رشد موجودی سرمایه (GK) می‌باشد):




در پنجرهٔ فوق، گزینهٔ CUSUM Test را انتخاب می‌کنیم. نمودار و مرز خطاهای تجمعی بازگشتی به‌صورت زیر ترسیم می‌شود.




نمودار فوق نشان می‌دهد که هیچ یک از خطاهای تجمعی از مرزها خارج نشده‌اند و لذا این آزمون هیچ‌گونه تغییر ساختاری را نشان نمی‌دهد.

### ۶-۶-۶ آزمون مجموع مجذور تجمعی خطاهای بازگشتی (CUSUMQ)

در این روش، از نسبت زیر استفاده می‌شود:

$$S_t=\frac{\sum_{j=K+1}^{t} w_j^2}{\sum_{j=K+1}^{n} w_j^2} \quad ; \quad t=K+1,\dots,n \qquad (۶-۴۸)$$

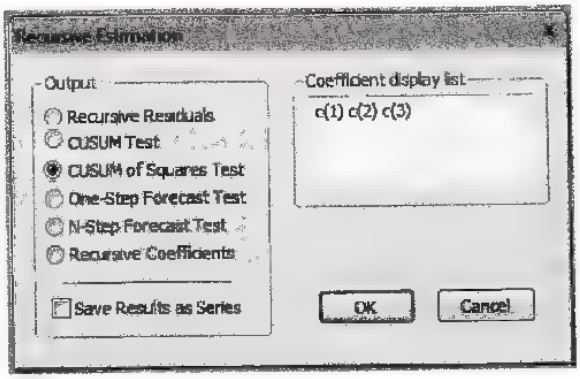
هر یک از $w_j$ها تحت فرضیه $H_0$ (فرضیه ثبات ضرایب) دارای توزیع $\chi_1^2$ هستند. امید ریاضی $S_t$ برابر با $E(S_t)=\frac{t-K}{n-K}$ می‌باشد که بین صفر و ۱ است. اگر انحراف از میانگین، زیاد باشد در این صورت، تغییر ضرایب رخ داده است. مرزها نیز توسط نرم‌افزارهایی مانند Eviews ترسیم می‌شود. مرزها به‌صورت $E(S_t)\pm C$ می‌باشد که مقدار $C$ بستگی به سطح معناداری دارد.

**آزمون مجموع مجذور تجمعی خطاهای بازگشتی (CUSUMQ) در Eviews** فایل data2

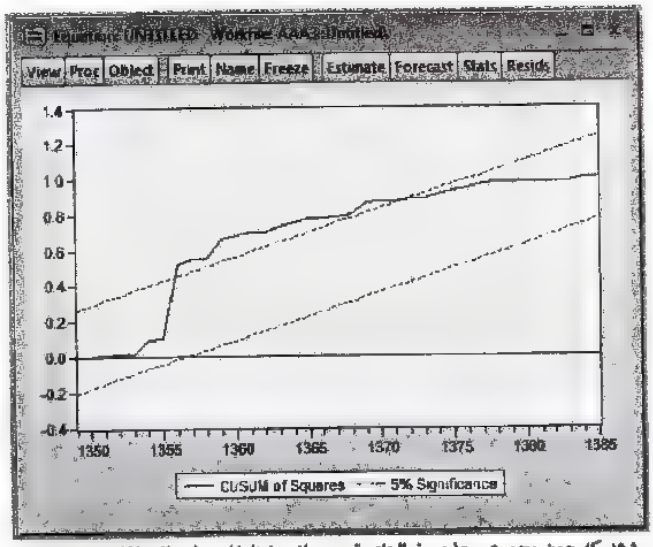
ابتدا معادله مورد نظر را برآورد می‌کنیم و در پنجرهٔ نتایج، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

View → Stability Diagnostics → Recursive Estimates (OLS only)

پنجرهٔ زیر باز می‌شود (معادلهٔ برآوردی بیانگر رگرسیون نرخ رشد تولید ناخالص داخلی بدون نفت (GYNO) روی عرض از مبدأ، نرخ رشد نیروی کار (GL) و نرخ رشد موجودی سرمایه (GK) می‌باشد):




در پنجرهٔ فوق، گزینهٔ CUSUM of Squares Test را انتخاب می‌کنیم. نمودار و مرز مجذور خطاهای تجمعی بازگشتی به‌صورت زیر ترسیم می‌شود.




نمودار فوق نشان می‌دهد که چون مجموع مجذور خطاهای تجمعی از مرزها خارج شده‌اند، لذا تغییر ساختاری رخ داده است.

### ۷-۶-۶ متغیرهای مجازی[1] و آزمون ثبات ضرایب

فرضیه ثبات پارامترها را می‌توان با استفاده از متغیرهای مجازی نیز انجام داد. بدین منظور فرض کنید که مدل (۳۰-۶) را داشته باشیم. کل دوره مورد مطالعه را به دو دوره تقسیم می‌کنیم که دوره اول شامل $n_1$ مشاهده و در دوره دوم شامل $n_2$ مشاهده می‌باشد ($n_1 + n_2 = n$). مدل (۳۰-۶) بیانگر رگرسیون مقید است که برای کل دوره برآورد می‌شود. اما رگرسیون غیرمقید را برای کل دوره به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 D_t + \beta_5 D_t X_{2t} + \beta_6 D_t X_{3t} + u_t \qquad (۶-۴۹)$$

$D_t$ متغیر مجازی است که مقدار آن در دوره اول برابر با ۱ و در دوره دوم برابر با صفر است. اگر قید $\beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$ را اعمال کنیم، معادله (۴۹-۶) تبدیل به (۳۰-۶) خواهد شد. اگر ضرایب در طی دوره اول و دوم ثابت باشند، در این صورت ضرایب $\beta_4$، $\beta_5$ و $\beta_6$ از نظر آماری معنادار نخواهند بود.

دوره اول: $D_t = 1 \Rightarrow Y_t = (\beta_1 + \beta_4) + (\beta_2 + \beta_5)X_{2t} + (\beta_3 + \beta_6)X_{3t} + u_t$

دوره دوم: $D_t = 0 \Rightarrow Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$

[1] جزئیات بیشتر در فصل پنجم ارائه شده است.

**آزمون ثبات ضرایب با استفاده از متغیرهای مجازی در Eviews** فایل data2

آزمون ثبات ضرایب تابع سرمایه‌گذاری خصوصی (IP) را با استفاده از متغیرهای مجازی انجام می‌دهیم. در اینجا دو دوره قبل و بعد از انقلاب را مقایسه می‌کنیم. بدین منظور ابتدا متغیر مجازی D57 را تعریف می‌کنیم که مقدار آن برای سالهای ۵۶-۱۳۴۶ برابر با ۱ و برای سالهای ۸۰-۱۳۵۷ برابر با صفر می‌باشد. حال مدل مورد نظر را با دستور زیر برآورد می‌کنیم:

LS IP C Y R D57 D57*Y D57*R

توجه شود که این مدل مشابه مدل (۳۲-۶) است که در آن C مقدار ثابت است که برابر با $\beta_1$ می‌باشد. همچنین $\beta_2$ و $\beta_3$ بیانگر ضرایب Y و R هستند. اما $\beta_4$، $\beta_5$ و $\beta_6$ به ترتیب ضرایب متغیرهای D57، D57*Y و D57*R می‌باشد. با برآورد مدل فوق نتایج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

Equation: UNTITLED Workfile: TNO::Untitled

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: IP
Method: Least Squares
Date: 01/30/11 Time: 18:48
Sample (adjusted): 1345 1380
Included observations: 36 after adjustments

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|---|
| C | -28339.87 | 12621.01 | -2.245372 | 0.0323 |
| Y | 0.393698 | 0.109819 | 3.584941 | 0.0012 |
| R | -2833.283 | 1208.771 | -2.343937 | 0.0259 |
| D57 | 22437.89 | 27178.52 | 0.825574 | 0.4156 |
| D57*Y | -0.147861 | 0.153192 | -0.963898 | 0.3428 |
| D57*R | 1105.481 | 4931.474 | 0.224158 | 0.8241 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| R-squared | 0.865818 | Mean dependent var | 25513.35 |
| Adjusted R-squared | 0.810121 | S.D. dependent var | 13257.30 |
| S.E. of regression | 8277.896 | Akaike info criterion | 21.03158 |
| Sum squared resid | 2.06E+09 | Schwarz criterion | 21.29550 |
| Log likelihood | -372.5884 | Hannan-Quinn criter. | 21.12368 |
| F-statistic | 11.95430 | Durbin-Watson stat | 1.447742 |
| Prob(F-statistic) | 0.000002 | | |

ملاحظه می‌شود که هیچ یک از ضرایب مربوط به متغیرهای مجازی، معنی‌دار نیستند و لذا ثبات ضرایب رد نمی‌شود. بدین ترتیب نتایج حاصل از روش چاو و روش متغیرهای مجازی یکسان می‌باشد.

## ۶-۷ خطای اندازه‌گیری متغیرها

یکی از مشکلاتی که در عمل با آن مواجه می‌شویم، خطای اندازه‌گیری است. به هر دلیلی ممکن است داده‌های گردآوری شده دارای خطا باشند. این خطا می‌تواند هم در مورد متغیر وابسته و هم متغیرهای توضیحی باشد.

ابتدا این بحث را برای متغیرهای توضیحی بررسی می‌کنیم. فرض کنید که مقادیر واقعی متغیر توضیحی برابر با $X^*$ باشد. در این صورت مدل زیر را داریم:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t \qquad (۶-۵۰)$$

اما مقدار واقعی $X$ (یعنی $X^*$) قابل دسترس نمی‌باشد و لذا از $X$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید که بین $X$ و $X^*$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$X_t = X_t^* + \varepsilon_t \qquad (۶-۵۱)$$

بنابراین $X_t$ دارای خطا است که آن را با $\varepsilon_t$ نشان می‌دهیم. اما فرض می‌شود که $\varepsilon_t$ یک متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس $\sigma_\varepsilon^۲$ است. با جایگذاری (۶-۵۱) در (۶-۵۰) خواهیم داشت:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + (u_t - \beta\varepsilon_t) \qquad (۶-۵۲)$$

$$= \alpha + \beta X_t + v_t \quad , \quad v_t = u_t - \beta\varepsilon_t$$

در اینجا جمله خطا $v_t$ است که مستقل از متغیر توضیحی نیست، زیرا:

$$\operatorname{cov}(v_t, X_t) = E[(v_t - Ev_t)(X_t - EX_t)] = E(v_t\varepsilon_t) = \operatorname{cov}(v_t, \varepsilon_t)$$

زیرا $E(\varepsilon_t) = E(v_t) = ۰$ و $E(X_t) = E(X_t^*) + E(\varepsilon_t) = X_t^*$ است. حال به‌جای $v_t$ قرار داده و بقیه محاسبات را انجام می‌دهیم:

$$\operatorname{cov}(X_t, v_t) = E(v_t\varepsilon_t) = E\big((u_t - \beta\varepsilon_t)\varepsilon_t\big)$$

$$= E(u_t\,\varepsilon_t) - \beta E(\varepsilon_t^۲) = ۰ - \beta\sigma_\varepsilon^۲ = -\beta\sigma_\varepsilon^۲ \qquad (۶-۵۳)$$

$E(u_t\,\varepsilon_t) = ۰$ است، زیرا $u_t$ و $\varepsilon_t$ مستقل‌اند.

حال تخمین $\beta$ را از مدل (۶-۵۲) به‌صورت زیر می‌نویسیم و از معادله (۶-۵۰) که مقدار واقعی $Y_t$ را توصیف می‌کند قرار می‌دهیم:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^۲} = \frac{\sum x_t Y_t}{\sum x_t^۲} = \frac{\sum x_t(\alpha + \beta X_t^* + u_t)}{\sum x_t^۲}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\beta\sum x_t X_t^* + \sum x_t u_t}{\sum x_t^۲} = \frac{\beta\sum x_t x_t^* + \sum x_t(u_t - \bar{u})}{\sum x_t^۲}$$

به‌جای $x_t$ از (۶-۵۱) مقدار $x_t^* + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$ را قرار می‌دهیم:

$$\hat{\beta} = \frac{\beta\sum\big(x_t^* + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\big)x_t^* + \sum\big(x_t^* + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\big)(u_t - \bar{u})}{\sum\big(x_t^* + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\big)^۲}$$

با ساده نمودن عبارت فوق و محاسبه حد احتمال (plim) آن خواهیم داشت:

$$\operatorname{plim}\hat{\beta}=\frac{\beta\sigma_{x^*}^2}{\sigma_{x^*}^2+\sigma_\varepsilon^2}=\beta\frac{1}{1+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_{x^*}^2}}<\beta \qquad (۶-۵۴)$$

که $\operatorname{plim}\frac{\Sigma x_t^{*2}}{n}=\sigma_{x^*}^2$ و $\operatorname{plim}\frac{\Sigma(\varepsilon_t-\bar{\varepsilon})^2}{n}=\sigma_{x^*}^2$ و برای سایر جملات برابر با صفر می‌باشد، زیرا $\operatorname{cov}(x^*,\varepsilon)=\operatorname{cov}(x^*,u)=\operatorname{cov}(u,\varepsilon)=0$ است. بنابراین حتی اگر حجم نمونه نیز افزایش یابد، تورش $\hat{\beta}$ از بین نخواهد رفت. با توجه به اینکه $\frac{1}{1+\sigma_\varepsilon^2/\sigma_{x^*}^2}$ کوچکتر از ۱ است، لذا $\hat{\beta}$ کمتر از حد واقعی، برآورد می‌گردد.

اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که خطای اندازه‌گیری مربوط به متغیر وابسته باشد. در این صورت مدل واقعی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Y_t^*=\alpha+\beta X_t+u_t \qquad (۶-۵۵)$$

$Y_t^*$ مقادیر واقعی $Y$ است، اما به‌جای آن، $Y_t$ را استفاده می‌کنیم که دارای خطا می‌باشد:

$$Y_t=Y_t^*+z_t \qquad (۶-۵۶)$$

که $z_t$ خطای اندازه‌گیری را نشان می‌دهد. حال در معادله (۶-۳۸) به‌جای $Y_t^*$ از (۶-۵۶) قرار می‌دهیم:

$$Y_t-z_t=\alpha+\beta X_t+u_t \quad\Rightarrow\quad Y_t=\alpha+\beta X_t+(u_t+z_t)$$
$$Y_t=\alpha+\beta X_t+w_t \quad , \quad w_t=u_t+z_t \qquad (۶-۵۷)$$

تخمین $\beta$ برای مدل (۶-۵۷) عبارت است از:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}=\frac{\sum x_t Y_t}{\sum x_t^2}$$

به‌جای $Y_t$ از مدل (۶-۵۷) قرار می‌دهیم:

$$\hat{\beta}=\frac{\sum x_t[\alpha+\beta X_t+w_t]}{\sum x_t^2}=\beta+\frac{\sum x_t w_t}{\sum x_t^2}\quad\Rightarrow E(\hat{\beta})=\beta$$

بنابراین، تخمین‌زنندهٔ OLS همچنان بدون تورش است.

همان‌طور که در رگرسیون یک متغیره ثابت شد، واریانس $\hat{\beta}$ برابر است با:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta})=\frac{\sigma_w^2}{\sum x_t^2} \qquad (۶-۵۸)$$

اما با توجه به $w_t = u_t + z_t$ و با توجه به استقلال $z_t$ و $u_t$، رابطه $\sigma_w^2 = \sigma_u^2 + \sigma_z^2$ برقرار است:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_u^2 + \sigma_z^2}{\sum x_t^2} \qquad (۶-۵۹)$$

لذا واضح است که خطای اندازه‌گیری در متغیر وابسته باعث افزایش واریانس تخمین‌زنندهٔ OLS می‌شود، اما نمی‌تواند موجب تورش شود، زیرا $E(\hat{\beta}) = \beta$ می‌باشد.

## ۶-۹ علّیت

علّیت یکی از مسائل اساسی در بررسی رابطه بین متغیرهای اقتصادی است. تعیین جهت علّیت برای متغیرهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد که مبانی نظری صریحی در مورد آنها وجود ندارد. یکی از مثال‌های معروف در اقتصاد که مورد مجادله می‌باشد مربوط به رابطهٔ بین رشد تولید ناخالص ملی $(Y)$ و رشد پول $(X)$ است. سؤال این است که آیا رشد پول موجب رشد تولید ناخالص ملی می‌شود یا اینکه ابتدا تولید ناخالص ملی افزایش می‌یابد و سپس موجب افزایش نیاز به پول می‌گردد و به‌دنبال آن بانک مرکزی حجم پول را افزایش می‌دهد.

روش مرسوم برای بررسی علّیت، معروف به آزمون علّیت گرانجر[1] است. در این روش معادلات زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{n} \beta_j Y_{t-j} + u_t \qquad (۶-۸۳)$$

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{t-i} + \sum_{j=1}^{n} b_j Y_{t-j} + v_t \qquad (۶-۸۴)$$

بر اساس معادلات فوق می‌توان بدین صورت بحث نمود که:

الف) اگر $\sum \alpha_i \neq 0$ و $\sum b_j = 0$ بوده و از نظر آماری معنی‌دار باشند، در این صورت علّیت از $X$ به $Y$ است.

ب) اگر $\sum \alpha_i = 0$ و $\sum b_j \neq 0$ باشد در این صورت علّیت از $Y$ به $X$ است.

ج) اگر $\sum \alpha_i \neq 0$ و $\sum b_j \neq 0$ باشد، در این صورت علّیت دو طرفه است.

[1] Granger

د) اگر $\sum \alpha_i = 0$ و $\sum b_j = 0$ باشد، این دو متغیر مستقل‌اند و رابطه‌ای با هم ندارند.

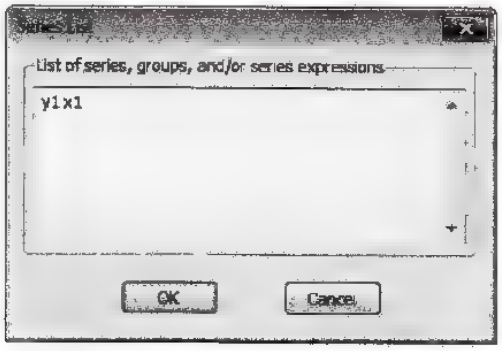
هر یک از این فرضیه‌ها را می‌توان با آماره $F$ که قبلاً برای مقایسه رگرسیون‌های مقید و غیرمقید معرفی گردید، آزمون نمود. هر یک از فرضیه‌های فوق بیانگر اعمال یک قید روی ضرایب معادله موردنظر است که با آماره $F$ قابل آزمون است.

**آزمون علّیت گرانجر در Eviwes** فایل data5

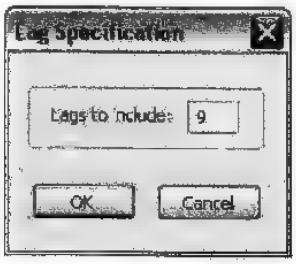
برای آزمون علّیت در Eviews به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

Quick → Group Statistics → Granger Causality Test

با انتخاب مسیر فوق، پنجره‌ای با عنوان Series List باز می‌شود که در آن نام متغیرهای مورد نظر را وارد می‌کنیم.




با انتخاب OK پنجره کوچکی با عنوان Lag Specification باز می‌شود که در آن تعداد وقفه‌هایی را که لازم است به متغیرها بدهیم وارد می‌کنیم.




در اینجا لازم است که وقفه‌های مختلف را بررسی کنیم، زیرا ممکن است بین دو متغیر، در وقفه‌های کوتاه رابطهٔ علیت وجود نداشته باشد، ولی با وقفه‌های طولانی‌تر بین آنها رابطهٔ علیت به‌وجود آید. به‌عنوان مثال نتایج آزمون علیت برای دو متغیر X و Y به‌صورت زیر داده می‌شود:

د) اگر $\sum \alpha_i = 0$ و $\sum b_j = 0$ باشد، این دو متغیر مستقل‌اند و رابطه‌ای با هم ندارند.

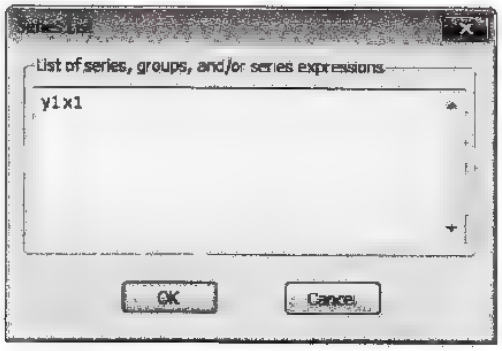
هر یک از این فرضیه‌ها را می‌توان با آماره $F$ که قبلاً برای مقایسه رگرسیون‌های مقید و غیرمقید معرفی گردید، آزمون نمود. هر یک از فرضیه‌های فوق بیانگر اعمال یک قید روی ضرایب معادله موردنظر است که با آماره $F$ قابل آزمون است.

**آزمون علّیت گرانجر در Eviwes** فایل data5

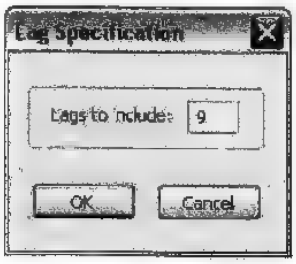
برای آزمون علّیت در Eviews به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

Quick → Group Statistics → Granger Causality Test

با انتخاب مسیر فوق، پنجره‌ای با عنوان Series List باز می‌شود که در آن نام متغیرهای مورد نظر را وارد می‌کنیم.




با انتخاب OK پنجره کوچکی با عنوان Lag Specification باز می‌شود که در آن تعداد وقفه‌هایی را که لازم است به متغیرها بدهیم وارد می‌کنیم.




در اینجا لازم است که وقفه‌های مختلف را بررسی کنیم، زیرا ممکن است بین دو متغیر، در وقفه‌های کوتاه رابطهٔ علیت وجود نداشته باشد، ولی با وقفه‌های طولانی‌تر بین آنها رابطهٔ علیت به‌وجود آید. به‌عنوان مثال نتایج آزمون علیت برای دو متغیر X و Y به‌صورت زیر داده می‌شود:

Group: UNTITLED Workfile: DATA5::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Sample | Sheet | Stats | Spec

Pairwise Granger Causality Tests
Date: 12/26/13 Time: 14:20
Sample: 1353 1386
Lags: 9

| Null Hypothesis | Obs | F-Statistic | Prob. |
|---|---|---|---|
| X1 does not Granger Cause Y1 | 23 | 6.64369 | 0.0419 |
| Y1 does not Granger Cause X1 | | 40.5856 | 0.0014 |

در جدول فوق، عبارت «X does not Granger Cause Y» بیانگر این فرضیه است که «X علت Y نیست». این فرضیه معادل با این است که در معادلات (۶۴-۶) و (۶۵-۶)، $\sum \alpha_1 = 0$ و $\sum b_j \neq 0$ می‌باشد. حال برای این فرضیه، اگر مقدار F بزرگتر از F جدول باشد، یا مقدار احتمال آن که در ستون آخر داده می‌شود، کوچکتر از ۰/۰۵ باشد، در این صورت فرضیه فوق رد می‌شود. این بدان معنا است که «X علت Y است». بنابراین در مثال فوق، با توجه به مقادیر F و احتمال‌های آن، «X علت Y است» و همچنین «Y علت X است». پس رابطه علیت دو طرفه است.

## مسائل

۱- محاسبات زیر را داریم:

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۳۰ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۴۰ \end{bmatrix} \qquad \sum_i y_i^۲ = ۷۵$$

الف) رگرسیون $Y$ روی $X$ را برآورد کنید.

ب) یک مشاهده جدید با $X = ۲$ و $Y = ۴$ به‌دست آمده است، آزمون پیش‌بینی چاو را برای ثبات ضرایب انجام دهید.

۲- یک رگرسیون سه متغیره با استفاده از داده‌های دوره ۸۶-۱۳۶۸ برآورد شده است:

$$\hat{Y}_t = ۲/۲ + ۰/۱۰۴X_{۲t} - ۳/۴۸X_{۳t} + ۰/۳۴X_{۴t}$$

مجموع تغییرات توضیح داده شده ۱۰۹/۶ و مجموع تغییرات توضیح داده نشده ۱۸/۴۸ بود. وقتی رگرسیون را با اضافه نمودن سه متغیر مجازی فصلی برآورد نمودیم مجموع تغییرات توضیح داده شده به ۱۱۴/۸ افزایش یافت. آیا اثرات فصلی معنادار است.

۳- معادله رگرسیون $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ با یک نمونه ۲۰تایی از یک منطقه شهری و یک نمونه ۱۰تایی از یک منطقه روستایی در دست بررسی است. مقادیر زیر برای این مناطق حساب شده است:

شهری $\sum y_t^2 = ۳۰$ $\quad \mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ \\ ۲۰ & ۲۵ \end{bmatrix}$

روستایی $\sum y_t^2 = ۲۴$ $\quad \mathbf{X'y} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۲۰ \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۱۰ \\ ۱۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$

آیا برای هر دو منطقه رابطهٔ یکسانی وجود دارد.

۴- در مسئله ۳ موارد زیر را بررسی کنید:

الف) فقط عرض از مبدأ متفاوت باشد.

ب) فقط شیب متفاوت باشد.

۵- در مورد مفهوم همخطی در مدل‌های رگرسیون، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مفهوم همخطی را توضیح دهید.

ب) نحوه شناسایی همخطی را توضیح دهید.

ج) چه راه‌کارهایی را برای رفع همخطی پیشنهاد می‌دهید.

۶- در مدل $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Z_t + u_t$ اگر متغیر $Z_t$ حذف شود، ثابت کنید که موجب تورش $\beta_2$ می‌شود. همچنین نشان دهید که مقدار تورش بستگی به ضریب همبستگی $X$ و $Z$ دارد.

۷- در مسئله ۱ فصل اول، آزمون حذف متغیر $Z$ را انجام دهید.

۸- در مسئله ۱ فصل اول، آزمون متغیر زائد را برای $Z$ انجام دهید.

۹- مراحل آزمون فرضیه را برای مقایسه دو رگرسیون $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Z_t + u_t$ و $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + v_t$ تشریح کنید.

۱۰- در مسئله ۱ فصل اول، با استفاده از متغیرهای مجازی بررسی کنید که آیا وقتی مقادیر $Z$ منفی است، اثر آن متفاوت از حالتی است که مقادیر $Z$ مثبت است؟

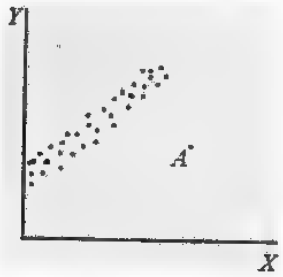
۱۱- در یک رگرسیون پویا میانگین وقفه و میانه وقفه به ترتیب برابر با ۴/۵ و ۳ به‌دست آمده است. مفهوم این مقادیر را به‌طور دقیق توضیح دهید.

۱۲- در مسئله ۱ فصل اول، آزمون علیت را برای متغیرهای $X$، $Y$ و $Z$ انجام دهید.

۱۳- در فرضیه انتظارات تطبیقی و فرضیه تعدیلات جزئی، جملات خطای رگرسیون چه تفاوتی دارند؟

۱۴- در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ اگر هم $X$ و هم $Y$ دارای خطای اندازه‌گیری باشند، چه تأثیری بر تخمین‌زنندهٔ $\beta$ دارد؟

۱۵- فرض کنید نمودار مشاهدات $X$ و $Y$ به‌صورت زیر باشد.




بعد از برآورد معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ معلوم شد که $\beta$ معنادار نیست. با حذف مشاهده $A$ و برآورد مجدد مدل، $\beta$ معنادار شد. دلیل آن را بیان کنید.

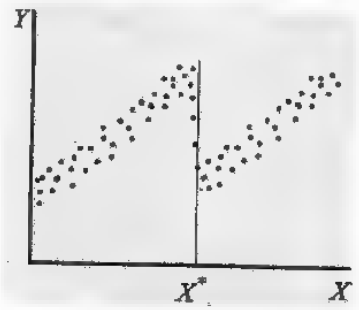
۱۶- ثابت کنید که اگر متغیر $Z_t$ از معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Z_t + u_t$ حذف شود و $Z_t$ هیچ همبستگی با $X_t$ نداشته باشد، آنگاه تخمین ضریب $X_t$ در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ بدون تورش خواهد بود.

۱۷- اگر $Z_t$ از معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Z_t + u_t$ حذف شود و $Z_t$ با $X_t$ همبستگی نداشته باشد، آیا تخمین عرضه از مبدأ تغییر خواهد کرد یا نه؟چرا؟

۱۸- درآزمون چاو اگر دونقطه تغییر ساختاری وجود داشته باشد، مراحل انجام آزمون را نوشته و تابع $F$را تشکیل دهید.

۱۹- ثابت کنید که در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ اگر $\alpha$ را حذف و معادله $Y_t = \beta X_t + u_t$ را برآورد کنیم، آنگاه برآورد $\beta$ دچار تورش خواهد شد. مقدار تورش به چه چیزی بستگی دارد؟

۲۰- مشاهدات $X$ و $Y$ به‌صورت نمودار زیر است:



الف) با استفاده از متغیرهای مجازی، معادله‌ای را برای توصیف نمودار فوق طرح کنید.

ب) در چه صورتی می‌توان آزمون نقطهٔ شکست چاو را برای نمودار فوق به‌کار برد.

۲۱- معادله $Y_t^* = \alpha + \beta X_t^* + u_t$ را داریم که $Y^*$ و $X^*$ مقادیر واقعی هستند ولی به‌جای آن از $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ استفاده می‌شود که $Y_t = Y_t^* + w_t$ و $X_t = Y_t^* + v_t$ می‌باشند. $v_t$ و $w_t$ خطای اندازه‌گیری هستند که میانگین صفر و واریانس $\sigma_v^2$ و $\sigma_w^2$ دارند. ثابت کنید که تخمین‌زنندهٔ OLS برای $\beta$ ناسازگاز است.

۲۲- به‌جای مدل $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t$ معادلات زیر برآوردمی‌شود:

$$Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + \varepsilon_t$$
$$X_{2t} = a_1 + a_2 X_{3t} + \varepsilon_t$$

الف) رابطه بین $\beta_1$ با $\alpha_1$ و $a_1$ چیست؟

ب) رابطه بین $\beta_2$ با $\alpha_2$ و $a_2$ چیست؟

ج) واریانس $\hat{\beta}_2$ و $\hat{\alpha}_2$ را مقایسه کنید.

۲۳- ثابت کنید که اگر در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ ، متغیر $X_t$ در معرض خطای اندازه‌گیری باشد، موجب تورش در تخمین $\beta$ خواهدشد.

۲۴- ثابت کنید که اگر در معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma Z_t + u_t$ به اشتباه $Z_t$ حذف شود و مدل $Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t$ برآورد گردد (حذف متغیر مهم) آنگاه تخمین ضریب $X_t$ دارای تورش (اریب) خواهد بود.

## ضمیمه فصل ۶: آزمون‌های خاص در Stata

**آزمون حذف متغیرهای مهم در Stata** فایل data3

برای انجام این آزمون می‌توان از آزمون F برای مقایسه دو مدل غیر مقید و مقید استفاده نمود. مراحل آزمون عبارت است از:

۱- مدل غیر مقید:

الف) مدل غیر مقید را تخمین می‌زنیم:

```
reg y1  x1  x2
```

ب) مجموع مجذور خطاهای غیر مقید را با فرمان زیر ذخیره می‌کنیم:

```
scalar  rssu=e(rss)
```

ج) درجه آزادی غیر مقید را با فرمان زیر ذخیره می‌کنیم:

```
scalar dfu=e(df_r)
```

۲- مدل مقید (متغیر x2 را حذف می‌کنیم):

الف) مدل مقید را تخمین می‌زنیم:

```
reg y1  x1
```

ب) مجموع مجذور خطاهای مقید را با فرمان زیر ذخیره می‌کنیم:

```
scalar  rssr=e(rss)
```

ج) درجه آزادی مقید را با فرمان زیر ذخیره می‌کنیم:

```
scalar dfr=e(df_r)
```

۳- آماره F را با فرمان زیر حساب می‌کنیم:

```
f=dfu/(dfr-dfu)*(rssr-rssu)/rssu
```

علاه بر این، می‌توان مقدار احتما (pvalue) را با فرمان زیر حساب نمود:

```
scalar pvalue=F(dfr-dfu,dfu,f)
```

۴- مقادیر محاسبه شده را می‌توان با فرمان زیر مشاهده نمود(البته مشاهدهٔ F و pvalue کفایت می‌کند):

```
Scalar list rssu rssr dfu dfr f pvalue
```

مقدار F را با عدد بحرانی مقایسه کرده و نتیجه‌گیری می‌کنیم. اگر مقدار F در ناحیه بحرانی قرار بگیرد نشان می‌دهد که متغیر حذف شده، مهم بوده است. از طرف دیگر اگر مقدار احتمال از ۰/۰۵ کوچکتر باشد، نشان می‌دهد که مقدار F در ناحیه بحرانی قرار دارد و لذا متغیر حذف شده مهم بوده است.

به عنوان مثال نتایج این محاسبات عبارت است از:

```
. scalar list rssr rssu dfr dfu f pvalue
     rssr =  .80476775
     rssu =  .10019204
      dfr =        30
      dfu =        29
        f =  203.93533
   pvalue =  1.185e-14
```

چون مقدار F= ۲۰۳/۹۳ در ناحیه بحرانی قرار دارد (زیرا احتمال کوچکتر از ۰/۰۵ است)، لذا متغیر حذف شدهٔ x2 مهم بوده است.

## آزمون متیغرهای زائد

بدین منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- معادله مورد نظر را تخمین می‌زنیم:

```
reg  y1 x1 x2
```

۲- فرمان زیر را برای آزمون معنادار بودن x2 انجام می دهیم:

```
test x2=0
```

۳- نتیجه آزمون به صورت زیر به‌دست می‌آید:

```
. test x2=0

 ( 1)  x2 = 0

       F(  1,   29) =  203.94
            Prob > F =    0.0000
```

چون مقدار F= ۲۰۳/۹۳ در ناحیه بحرانی قرار دارد (زیرا احتمال کوچکتر از ۰/۰۵ است)، لذا متغیر x2 زائد نیست.

## آزمون چاو در Stata

مراحل آزمون چاو به‌صورت زیر می‌باشد:

۱- ابتدا زمان تغییر ساختاری را معلوم کنید (در این مثال سال ۱۳۷۰ می‌باشد).

۲- یک متغیر مجازی با فرمان زیر ایجاد کنید که برای سال‌های قبل از ۱۳۷۰ برابر با ۱ می‌باشد:

```
gen d=(t>=1370)
```

۳- رگرسیون دوره اول را برآورد کرده و سپس مجموع مجذور خطاها و درجه آزادی را ذخیره کنید:

```
reg y1 x1
scalar rss1=e(rss)
scalar df1=e(df_r)
```

۴- رگرسیون دوره دوم را برآورد کرده و سپس مجموع مجذور خطاها و درجه آزادی را ذخیره کنید:

```
reg y1 x1
scalar rss2=e(rss)
scalar df2=e(df_r)
```

۵- مجموع مجذور خطاهای دو دوره و مجموع درجه آزادی‌ها را حساب کنید:

```
scalar rssu=rss1+rss2
scalar dfu=df1+df2
```

۶- رگرسیون کل دوره را برآورد کرده و سپس مجموع مجذور خطاها و درجه آزادی را ذخیره کنید:

```
reg y1 x1
scalar rssr=e(rss)
scalar dfr=e(df_r)
```

۷- آماره F را و احتمال مربوطه را حساب می‌کنیم:

```
f=dfu/(dfr-dfu)*(rssr-rssu)/rssu
scalar pvalue=F(dfr-dfu, dfu, f)
```

۸- مقادیر محاسبه شده را می‌توان با فرمان زیر مشاهده نمود:

```
scalar list f pvalue
```

مقدار F را با عدد بحرانی مقایسه کرده و نتیجه‌گیری می‌کنیم. اگر مقدار F در ناحیه بحرانی قرار بگیرد نشان می‌دهد که تغییر ساختاری رخ داده است و ضرایب در این دو دوره متفاوت هستند.

## آزمون علیت گرانجر در Stata

آزمون علیت گرانجر را می‌توان با استفاده از مدل‌های خودرگرسیون برداری (VAR) انجام داد اما چون این مدل‌ها در فصل ۱۸ بررسی می‌شوند لذا در اینجا از روش ساده‌تری استفاده می‌کنیم. فرض کنید که رابطه علین بین دو متغیر y1 و y2 را می‌خواهیم با پنج وقفه بررسی کنیم.

ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا y2 علت y1 هست یا نه. بدین منظور معادله زیر را برآورد می‌کنیم:

```
reg y1 l(1/5).y1 l(1/5).y2
```

حال آزمون صفر بودن ضرایب y2 را به فرمان زیر انجام می‌دهیم:

test (l1.y2=l2.y2–l3.y2–l4.y2=l5.y2=0)

نتیجه آزمون عبارت است از:

```
. test (l1.y2=l2.y2=l3.y2=l4.y2=l5.y2=0)

 ( 1)  L.y2 - L2.y2 = 0
 ( 2)  L.y2 - L3.y2 = 0
 ( 3)  L.y2 - L4.y2 = 0
 ( 4)  L.y2 - L5.y2 = 0
 ( 5)  L.y2 = 0

       F(  5,   16) =    0.98
            Prob > F =    0.4604
```

چون مقدار F=۰/۹۸ در ناحیه بحرانی قرار ندارد (زیرا احتمال بزرگتر از ۰/۰۵ است)، لذا y2علت y1 نیست.

مشابه بحث فوق بررسی می‌کنیم که آیا y1 علت y2 هست یا نه. بدین منظور معادله زیر را برآورد می‌کنیم:

reg y2 l(1/5).y1 l(1/5).y2

حال آزمون صفر بودن ضرایب y1 را به فرمان زیر انجام می‌دهیم:

test (l1.y1=l2.y1–l3.y1–l4.y1=l5.y1=0)

نتیجه آزمون عبارت است از:

```
. test (l1.y1=l2.y1=l3.y1=l4.y1=l5.y1=0)

 ( 1)  L.y1 - L2.y1 = 0
 ( 2)  L.y1 - L3.y1 = 0
 ( 3)  L.y1 - L4.y1 = 0
 ( 4)  L.y1 - L5.y1 = 0
 ( 5)  L.y1 = 0

       F(  5,    16) =    0.20
            Prob > F =    0.9566
```

چون مقدار F=۰/۲۰ در ناحیه بحرانی قرار ندارد (زیرا احتمال بزرگتر از ۰/۰۵ است)، لذا y1 علت y2 نیست.

# ضمیمه

## جداول آماری

مقادیر توزیع $t_{\alpha,n}$

| n | 0.25 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 3.078 | 6 314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 |
| 2 | 816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 |
| 3 | .765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 |
| 4 | .741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 |
| 5 | .727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 |
| 6 | .718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 |
| 7 | .711 | 1.415 | 1 895 | 2.365 | 2.998 | 3 499 |
| 8 | .706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3 355 |
| 9 | .703 | 1.383 | 1 833 | 2.262 | 2.821 | 3 250 |
| 10 | .700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 |
| 11 | .697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 |
| 12 | .695 | 1 356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 |
| 13 | .694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2 650 | 3.012 |
| 14 | .692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2 624 | 2 977 |
| 15 | .691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 |
| 16 | .690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 |
| 17 | .689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 |
| 18 | .688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2 878 |
| 19 | .688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 |
| 20 | 687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 |
| 21 | .686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 |
| 22 | .686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2 508 | 2.819 |
| 23 | .685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 |
| 24 | .685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 |
| 25 | .684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 |
| 26 | .684 | 1 315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 |
| 27 | .684 | 1 314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 |
| 28 | .683 | 1.313 | 1.701 | 2 048 | 2.467 | 2.763 |
| 29 | 683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 |
| 30 | 683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2 457 | 2.750 |
| 35 | .682 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 |
| 40 | .681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 |
| 45 | .680 | 1.301 | 1.679 | 2.014 | 2.412 | 2.690 |
| 50 | .679 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 |
| 60 | .679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 |
| 70 | .678 | 1.294 | 1.667 | 1.994 | 2.381 | 2.648 |
| 80 | .678 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 |
| 90 | .677 | 1.291 | 1.662 | 1.987 | 2 368 | 2.632 |
| 100 | .677 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.364 | 2.626 |
| ∞ | .674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 |

## مقادیر توزیع $\chi^2_{\alpha,n}$

| n | .005 | .010 | .025 | .050 | .100 | .250 | .500 | .750 | .900 | .950 | .975 | .990 | .995 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .00004 | .0002 | .001 | .004 | .02 | .10 | .45 | 1.32 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | .01 | .02 | .05 | .10 | .21 | .58 | 1.39 | 2.77 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | .07 | .11 | .22 | .35 | .58 | 1.21 | 2.37 | 4.11 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 |
| 4 | .21 | .30 | .48 | .71 | 1.06 | 1.92 | 3.36 | 5.39 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | .41 | .55 | .83 | 1.15 | 1.61 | 2.67 | 4.35 | 6.63 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | .68 | .87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.45 | 5.35 | 7.84 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | .99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 4.25 | 6.35 | 9.04 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 5.07 | 7.34 | 10.22 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.90 | 8.34 | 11.39 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.74 | 9.34 | 12.55 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 7.58 | 10.34 | 13.70 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 8.44 | 11.34 | 14.85 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 9.30 | 12.34 | 15.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 10.17 | 13.34 | 17.12 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 11.04 | 14.34 | 18.25 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.91 | 15.34 | 19.37 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 12.79 | 16.34 | 20.49 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 13.68 | 17.34 | 21.60 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 14.56 | 18.34 | 22.72 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 15.45 | 19.34 | 23.83 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 16.34 | 20.34 | 24.93 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 17.24 | 21.34 | 26.04 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 18.14 | 22.34 | 27.14 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 19.04 | 23.34 | 28.24 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 19.94 | 24.34 | 29.34 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 24.48 | 29.34 | 34.80 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 35 | 17.19 | 18.51 | 20.57 | 22.47 | 24.80 | 29.05 | 34.34 | 40.22 | 46.06 | 49.80 | 53.20 | 57.34 | 60.27 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 33.66 | 39.34 | 45.62 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 45 | 24.31 | 25.90 | 28.37 | 30.61 | 33.35 | 38.29 | 44.34 | 50.98 | 57.51 | 61.66 | 65.41 | 69.96 | 73.17 |
| 50 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 42.94 | 49.33 | 56.33 | 63.17 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 |

## مقادیر توزیع $F_{.05,n_1,n_2}$

درجه آزادی صورت= $n_1$

| $n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161.45 | 199.50 | 215.71 | 224.58 | 230.16 | 233.99 | 236.77 | 238.88 | 240.54 |
| 2 | 18.51 | 19.00 | 19.16 | 19.25 | 19.30 | 19.33 | 19.35 | 19.37 | 19.38 |
| 3 | 10.13 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.01 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 |
| 4 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 |
| 5 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 |
| 6 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 |
| 7 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 |
| 8 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 |
| 9 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 |
| 10 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 |
| 15 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 |
| 20 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 |
| 25 | 4.24 | 3.39 | 2.99 | 2.76 | 2.60 | 2.49 | 2.40 | 2.34 | 2.28 |
| 30 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 |
| 40 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 |
| 50 | 4.03 | 3.18 | 2.79 | 2.56 | 2.40 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.07 |
| 70 | 3.98 | 3.13 | 2.74 | 2.50 | 2.35 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.02 |
| 100 | 3.94 | 3.09 | 2.70 | 2.46 | 2.31 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.97 |
| ∞ | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 |

| $n_2$ | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 241.88 | 243.91 | 245.95 | 248.01 | 250.10 | 251.14 | 252.20 | 252.20 | 254.19 |
| 2 | 19.40 | 19.41 | 19.43 | 19.45 | 19.46 | 19.47 | 19.48 | 19.48 | 19.49 |
| 3 | 8.79 | 8.74 | 8.70 | 8.66 | 8.62 | 8.59 | 8.57 | 8.57 | 8.53 |
| 4 | 5.96 | 5.91 | 5.86 | 5.80 | 5.75 | 5.72 | 5.69 | 5.69 | 5.63 |
| 5 | 4.74 | 4.68 | 4.62 | 4.56 | 4.50 | 4.46 | 4.43 | 4.43 | 4.37 |
| 6 | 4.06 | 4.00 | 3.94 | 3.87 | 3.81 | 3.77 | 3.74 | 3.74 | 3.67 |
| 7 | 3.64 | 3.57 | 3.51 | 3.44 | 3.38 | 3.34 | 3.30 | 3.30 | 3.23 |
| 8 | 3.35 | 3.28 | 3.22 | 3.15 | 3.08 | 3.04 | 3.01 | 3.01 | 2.93 |
| 9 | 3.14 | 3.07 | 3.01 | 2.94 | 2.86 | 2.83 | 2.79 | 2.79 | 2.71 |
| 10 | 2.98 | 2.91 | 2.85 | 2.77 | 2.70 | 2.66 | 2.62 | 2.62 | 2.54 |
| 15 | 2.54 | 2.48 | 2.40 | 2.33 | 2.25 | 2.20 | 2.16 | 2.16 | 2.07 |
| 20 | 2.35 | 2.28 | 2.20 | 2.12 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.95 | 1.85 |
| 25 | 2.24 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.92 | 1.87 | 1.82 | 1.82 | 1.72 |
| 30 | 2.16 | 2.09 | 2.01 | 1.93 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.74 | 1.63 |
| 40 | 2.08 | 2.00 | 1.92 | 1.84 | 1.74 | 1.69 | 1.64 | 1.64 | 1.52 |
| 50 | 2.03 | 1.95 | 1.87 | 1.78 | 1.69 | 1.63 | 1.58 | 1.58 | 1.45 |
| 70 | 1.97 | 1.89 | 1.81 | 1.72 | 1.62 | 1.57 | 1.50 | 1.50 | 1.36 |
| 100 | 1.93 | 1.85 | 1.77 | 1.68 | 1.57 | 1.52 | 1.45 | 1.45 | 1.30 |
| ∞ | 1.83 | 1.75 | 1.67 | 1.57 | 1.46 | 1.39 | 1.34 | 1.31 | 1.30 |

## مقادیر توزیع $F_{.01,n_1,n_2}$

درجه آزادی صورت= $n_1$

| $n_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052.18 | 4999.50 | 5403.35 | 5624.58 | 5763.65 | 5858.99 | 5928.36 | 5981.07 | 6022.47 |
| 2 | 98.50 | 99.00 | 99.17 | 99.25 | 99.30 | 99.33 | 99.36 | 99.37 | 99.39 |
| 3 | 34.12 | 30.82 | 29.46 | 28.71 | 28.24 | 27.91 | 27.67 | 27.49 | 27.35 |
| 4 | 21.20 | 18.00 | 16.69 | 15.98 | 15.52 | 15.21 | 14.98 | 14.80 | 14.66 |
| 5 | 16.26 | 13.27 | 12.06 | 11.39 | 10.97 | 10.67 | 10.46 | 10.29 | 10.16 |
| 6 | 13.75 | 10.92 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 |
| 7 | 12.25 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 |
| 8 | 11.26 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 |
| 9 | 10.56 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 |
| 10 | 10.04 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 |
| 15 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 |
| 20 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.87 | 3.70 | 3.56 | 3.46 |
| 25 | 7.77 | 5.57 | 4.68 | 4.18 | 3.85 | 3.63 | 3.46 | 3.32 | 3.22 |
| 30 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 |
| 40 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 |
| 50 | 7.17 | 5.06 | 4.20 | 3.72 | 3.41 | 3.19 | 3.02 | 2.89 | 2.78 |
| 70 | 7.01 | 4.92 | 4.07 | 3.60 | 3.29 | 3.07 | 2.91 | 2.78 | 2.67 |
| 100 | 6.90 | 4.82 | 3.98 | 3.51 | 3.21 | 2.99 | 2.82 | 2.69 | 2.59 |
| ∞ | 6.66 | 4.63 | 3.80 | 3.34 | 3.04 | 2.82 | 2.66 | 2.53 | 2.43 |

| $n_2$ | 10 | 12 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6055.85 | 6106.32 | 6157.28 | 6208.73 | 6260.65 | 6286.78 | 6313.03 | 6313.03 | 6362.68 |
| 2 | 99.40 | 99.42 | 99.43 | 99.45 | 99.47 | 99.47 | 99.48 | 99.48 | 99.50 |
| 3 | 27.23 | 27.05 | 26.87 | 26.69 | 26.50 | 26.41 | 26.32 | 26.32 | 26.14 |
| 4 | 14.55 | 14.37 | 14.20 | 14.02 | 13.84 | 13.75 | 13.65 | 13.65 | 13.47 |
| 5 | 10.05 | 9.89 | 9.72 | 9.55 | 9.38 | 9.29 | 9.20 | 9.20 | 9.03 |
| 6 | 7.87 | 7.72 | 7.56 | 7.40 | 7.23 | 7.14 | 7.06 | 7.06 | 6.89 |
| 7 | 6.62 | 6.47 | 6.31 | 6.16 | 5.99 | 5.91 | 5.82 | 5.82 | 5.66 |
| 8 | 5.81 | 5.67 | 5.52 | 5.36 | 5.20 | 5.12 | 5.03 | 5.03 | 4.87 |
| 9 | 5.26 | 5.11 | 4.96 | 4.81 | 4.65 | 4.57 | 4.48 | 4.48 | 4.32 |
| 10 | 4.85 | 4.71 | 4.56 | 4.41 | 4.25 | 4.17 | 4.08 | 4.08 | 3.92 |
| 15 | 3.80 | 3.67 | 3.52 | 3.37 | 3.21 | 3.13 | 3.05 | 3.05 | 2.88 |
| 20 | 3.37 | 3.23 | 3.09 | 2.94 | 2.78 | 2.69 | 2.61 | 2.61 | 2.43 |
| 25 | 3.13 | 2.99 | 2.85 | 2.70 | 2.54 | 2.45 | 2.36 | 2.36 | 2.18 |
| 30 | 2.98 | 2.84 | 2.70 | 2.55 | 2.39 | 2.30 | 2.21 | 2.21 | 2.02 |
| 40 | 2.80 | 2.66 | 2.52 | 2.37 | 2.20 | 2.11 | 2.02 | 2.02 | 1.82 |
| 50 | 2.70 | 2.56 | 2.42 | 2.27 | 2.10 | 2.01 | 1.91 | 1.91 | 1.70 |
| 70 | 2.59 | 2.45 | 2.31 | 2.15 | 1.98 | 1.89 | 1.78 | 1.78 | 1.56 |
| 100 | 2.50 | 2.37 | 2.22 | 2.07 | 1.89 | 1.80 | 1.69 | 1.69 | 1.45 |
| ∞ | 2.34 | 2.20 | 2.06 | 1.90 | 1.72 | 1.61 | 1.50 | 1.50 | 1.16 |

## مقادیر آماره دوربین- واتسن (*DW*)

| | $k=1$ | | $k=2$ | | $k=3$ | | $k=4$ | | $k=5$ | | $k=10$ | | $k=15$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $dL$ | $dU$ | $dL$ | $dU$ | $dL$ | $dU$ | $dL$ | $dU$ | $dL$ | $dU$ | $dL$ | $dU$ | $dL$ | $dU$ |
| 15 | 1.08 | 1.36 | .95 | 1.54 | .82 | 1.75 | .69 | 1.97 | .56 | 2.21 | | | | |
| 16 | 1.10 | 1.37 | .98 | 1.54 | .86 | 1.73 | .74 | 1.93 | .62 | 2.15 | .16 | 3.30 | | |
| 17 | 1.13 | 1.38 | 1.02 | 1.54 | .90 | 1.71 | .78 | 1.90 | .67 | 2.10 | .20 | 3.18 | | |
| 18 | 1.16 | 1.39 | 1.05 | 1.53 | .93 | 1.69 | .82 | 1.87 | .71 | 2.06 | .24 | 3.07 | | |
| 19 | 1.18 | 1.40 | 1.08 | 1.53 | .97 | 1.68 | .86 | 1.85 | .75 | 2.02 | .29 | 2.97 | | |
| 20 | 1.20 | 1.41 | 1.10 | 1.54 | 1.00 | 1.68 | .90 | 1.83 | .79 | 1.99 | .34 | 2.89 | .06 | 3.68 |
| 21 | 1.22 | 1.42 | 1.13 | 1.54 | 1.03 | 1.67 | .93 | 1.81 | .83 | 1.96 | .38 | 2.81 | .09 | 3.58 |
| 22 | 1.24 | 1.43 | 1.15 | 1.54 | 1.05 | 1.66 | .96 | 1.80 | .86 | 1.94 | .42 | 2.73 | .12 | 3.55 |
| 23 | 1.26 | 1.44 | 1.17 | 1.54 | 1.08 | 1.66 | .99 | 1.79 | .90 | 1.92 | .47 | 2.67 | .15 | 3.41 |
| 24 | 1.27 | 1.45 | 1.19 | 1.55 | 1.10 | 1.66 | 1.01 | 1.78 | .93 | 1.90 | .51 | 2.61 | .19 | 3.33 |
| 25 | 1.29 | 1.45 | 1.21 | 1.55 | 1.12 | 1.66 | 1.04 | 1.77 | .95 | 1.89 | .54 | 2.57 | .22 | 3.25 |
| 26 | 1.30 | 1.46 | 1.22 | 1.55 | 1.14 | 1.65 | 1.06 | 1.76 | .98 | 1.88 | .58 | 2.51 | .26 | 3.18 |
| 27 | 1.32 | 1.47 | 1.24 | 1.56 | 1.16 | 1.65 | 1.08 | 1.76 | 1.01 | 1.86 | .62 | 2.47 | .29 | 3.11 |
| 28 | 1.33 | 1.48 | 1.26 | 1.56 | 1.18 | 1.65 | 1.10 | 1.75 | 1.03 | 1.85 | .65 | 2.43 | .33 | 3.05 |
| 29 | 1.34 | 1.48 | 1.27 | 1.56 | 1.20 | 1.65 | 1.12 | 1.74 | 1.05 | 1.84 | .68 | 2.40 | .36 | 2.99 |
| 30 | 1.35 | 1.49 | 1.28 | 1.57 | 1.21 | 1.65 | 1.14 | 1.74 | 1.07 | 1.83 | .71 | 2.36 | .39 | 2.94 |
| 31 | 1.36 | 1.50 | 1.30 | 1.57 | 1.23 | 1.65 | 1.16 | 1.74 | 1.09 | 1.83 | .74 | 2.33 | .43 | 2.99 |
| 32 | 1.37 | 1.50 | 1.31 | 1.57 | 1.24 | 1.65 | 1.18 | 1.73 | 1.11 | 1.82 | .77 | 2.31 | .46 | 2.84 |
| 33 | 1.38 | 1.51 | 1.32 | 1.58 | 1.26 | 1.65 | 1.19 | 1.73 | 1.13 | 1.81 | .80 | 2.28 | .49 | 2.80 |
| 34 | 1.39 | 1.51 | 1.33 | 1.58 | 1.27 | 1.65 | 1.21 | 1.73 | 1.15 | 1.81 | .82 | 2.26 | .52 | 2.75 |
| 35 | 1.40 | 1.52 | 1.34 | 1.53 | 1.28 | 1.65 | 1.22 | 1.73 | 1.16 | 1.80 | .85 | 2.24 | .55 | 2.72 |
| 36 | 1.41 | 1.52 | 1.35 | 1.59 | 1.29 | 1.65 | 1.24 | 1.73 | 1.18 | 1.80 | .87 | 2.22 | .58 | 2.68 |
| 37 | 1.42 | 1.53 | 1.36 | 1.59 | 1.31 | 1.66 | 1.25 | 1.72 | 1.19 | 1.80 | .89 | 2.20 | .60 | 2.65 |
| 38 | 1.43 | 1.54 | 1.37 | 1.59 | 1.32 | 1.66 | 1.26 | 1.72 | 1.21 | 1.79 | .91 | 2.18 | .63 | 2.61 |
| 39 | 1.43 | 1.54 | 1.38 | 1.60 | 1.33 | 1.66 | 1.27 | 1.72 | 1.22 | 1.79 | .93 | 2.16 | .65 | 2.59 |
| 40 | 1.44 | 1.54 | 1.39 | 1.60 | 1.34 | 1.66 | 1.29 | 1.72 | 1.23 | 1.79 | .95 | 2.15 | .68 | 2.56 |
| 45 | 1.48 | 1.57 | 1.43 | 1.62 | 1.38 | 1.67 | 1.34 | 1.72 | 1.29 | 1.78 | 1.04 | 2.09 | .79 | 2.44 |
| 50 | 1.50 | 1.59 | 1.46 | 1.63 | 1.42 | 1.67 | 1.38 | 1.72 | 1.34 | 1.77 | 1.11 | 2.04 | .88 | 2.35 |
| 55 | 1.53 | 1.60 | 1.49 | 1.64 | 1.45 | 1.68 | 1.41 | 1.72 | 1.38 | 1.77 | 1.17 | 2.01 | .96 | 2.28 |
| 60 | 1.55 | 1.62 | 1.51 | 1.65 | 1.48 | 1.69 | 1.44 | 1.73 | 1.41 | 1.77 | 1.22 | 1.98 | 1.03 | 2.23 |
| 65 | 1.57 | 1.63 | 1.54 | 1.66 | 1.50 | 1.70 | 1.47 | 1.73 | 1.44 | 1.77 | 1.27 | 1.96 | 1.09 | 2.18 |
| 70 | 1.58 | 1.64 | 1.55 | 1.67 | 1.52 | 1.70 | 1.49 | 1.74 | 1.46 | 1.77 | 1.30 | 1.95 | 1.14 | 2.15 |
| 75 | 1.60 | 1.65 | 1.57 | 1.68 | 1.54 | 1.71 | 1.51 | 1.74 | 1.49 | 1.77 | 1.34 | 1.94 | 1.18 | 2.12 |
| 80 | 1.61 | 1.66 | 1.59 | 1.69 | 1.56 | 1.72 | 1.53 | 1.74 | 1.51 | 1.77 | 1.37 | 1.93 | 1.22 | 2.09 |
| 85 | 1.62 | 1.67 | 1.60 | 1.70 | 1.57 | 1.72 | 1.55 | 1.75 | 1.52 | 1.77 | 1.40 | 1.92 | 1.26 | 2.07 |
| 90 | 1.63 | 1.68 | 1.61 | 1.70 | 1.59 | 1.73 | 1.57 | 1.75 | 1.54 | 1.78 | 1.42 | 1.91 | 1.29 | 2.06 |
| 95 | 1.64 | 1.69 | 1.62 | 1.71 | 1.60 | 1.73 | 1.58 | 1.75 | 1.56 | 1.78 | 1.44 | 1.90 | 1.32 | 2.04 |
| 100 | 1.65 | 1.69 | 1.63 | 1.72 | 1.61 | 1.74 | 1.59 | 1.76 | 1.57 | 1.78 | 1.46 | 1.90 | 1.35 | 2.03 |

تعداد ضرایب به استثنای عرض از مبدأ=k

تعداد مشاهدات=n